Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЕ

С предисловием П. С. АЛЕКСАНДРОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов математических специальностей вузов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.1
К88
УДК 51

Кудрявцев Л. Д. **Современная математика и ее преподавание**/С предисловием П. С. Александрова: Учебное пособие для вузов.— 2-е изд., доп.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 176 с.

Описывается роль математики в современном обществе и ее применения в различных областях науки и техники. Рассматриваются связи математических моделей с реальными явлениями, сущность математических моделей, структур и методов исследования. Анализируются специфические особенности, возникающие в настоящее время при изучении математики, ставятся основные задачи, которые необходимо решить для приведения в соответствие математического образования с современными потребностями в математических методах, и даются рекомендации, на основе которых целесообразно строить изучение современной математики.

Первое издание вышло в 1980 г. Во втором издании сделаны дополнения и некоторые уточнения.

Для преподавателей математики высших учебных заведений и для всех интересующихся вопросами преподавания.

Библиогр. 23 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук профессор *В. А. Треногин*

К $\dfrac{1702000000-093}{053(02)-85}$ 61—85

ПРЕДИСЛОВИЕ АКАДЕМИКА П. С. АЛЕКСАНДРОВА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике необычайно большое число будущих инженеров, биологов, экономистов, социологов и т. д. нуждается в серьезной математической подготовке, которая давала бы возможность математическими методами исследовать широкий круг новых проблем, применять современную вычислительную технику, использовать теоретические достижения в практике. Для этого по меньшей мере необходимо получение ими правильного общего представления о том, что́ такое математика и математическая модель, в чем заключается математический подход к изучению явлений реального мира, как его можно применять и что он может дать. Принципиальными моментами проблемы математического образования являются: выбор объема и содержания математических курсов, определение целей обучения, правильное сочетание широты и глубины изложения, строгости и наглядности, т. е. выбор наиболее эффективных и рациональных путей обучения, и все это с учетом ограниченного времени, отводимого на изучение математики.

Эта проблема, как верно отметил автор, необъятна, однако ему в значительной мере удалось выделить здесь основное и первостепенное.

Перед нами книга, написанная известным ученым, доктором физико-математических наук, старшим научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, талантливым педагогом, более 25 лет заведующим кафедрой высшей математики Московского физико-технического института.

Профессор Л. Д. Кудрявцев вносит большой вклад в развитие математического образования в нашей стране.

Его учебник «Математический анализ» широко известен и принят в качестве основного в ряде высших учебных заведений страны. Система преподавания математики, выработанная в МФТИ, с большим удельным весом самостоятельной работы студентов хорошо зарекомендовала себя и оказалась результативной в таких крупнейших вузах нашей страны, как Московский энергетический институт, Новосибирский электротехнический институт и др.

Л. Д. Кудрявцев является членом Президиума научно-методического совета по математике при Минвузе СССР, на Всемирной ассамблее математиков в 1978 году переизбран членом Международной комиссии по математическому образованию, с 1979 года вошел в редколлегию международного журнала «Educational Studies in Mathematics» (Голландия — США).

Основная мысль, которую автор развивает в книге, состоит в том, что нет «чистой» и прикладной математики, что, несмотря на внешнюю разобщенность своих частей, математика едина и ее единство основано на самой сущности математики.

Автор считает, что обучение математике нельзя подменить обучением ряду ее приложений и методов, не разъясняя сущности математических понятий и не учитывая внутреннюю логику самой математики. Так подготовленные специалисты могут оказаться беспомощными при изучении новых конкретных явлений, поскольку будут лишены необходимой математической культуры и не приучены к рассмотрению абстрактных математических моделей.

Отметим конструктивный подход автора к рассматриваемой проблеме: им предложены и проанализированы 10 положений, которые должны быть положены в основу обучения математике.

Широкий круг рассматриваемых в книге вопросов, их актуальность, доброжелательность автора, когда он делится своим богатым педагогическим опытом, множество поучительных примеров — все это адресует ее широкому кругу читателей и, безусловно, вызовет интерес не только тех, кто учит математике, но и тех, кто ее изучает или соприкасается с ней в своей деятельности.

Март 1980 г. *П. С. Александров*

То, что имеет основанием истину, следует напоминать, не боясь показаться надоедливым.

Н. И. Пирогов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Прелагаемая книга посвящена в основном описанию роли математики в жизни современного общества и анализу методов обучения математике студентов, будущая специальность которых не является математикой, но которые в своей деятельности будут широко пользоваться математическими методами. Ее основой стали многочисленные дискуссии, которые приходилось вести автору последние тридцать лет, в течение которых он занимался обучением математике студентов физических специальностей.

В основу первого издания книги (1980 г.) легли брошюра автора «Мысли о современной математике и ее изучении»*), поводом для написания которой явилась лекция «Современное математическое образование инженера», прочитанная автором 18 декабря 1975 г. в центральном лектории Всесоюзного общества «Знание», и доклад «О математическом образовании в высших технических учебных заведениях», сделанный 20 августа 1976 г. на Третьем международном конгрессе по математическому образованию в Карлсруэ, ФРГ. В книгу вошли также дополнения, написанные автором для немецкого перевода указанной брошюры**) и изложение ряда вопросов, связанных с преподаванием математики и не затронутых автором раньше. Для второго издания автором сделаны дополнения и некоторые уточнения текста. Более подробно рассмотрен вопрос о воспитании.

---

*) Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении.— М.: Наука, 1977.

**) Kudrjavzev L. Gedanken über die moderne Mathematik und ihr Studium.— Leipzig: BSB, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1983; Frankfurt am Main: Verlag Harry Deutsch, 1983.

В первой главе книги рассматриваются некоторые общие вопросы педагогики, особенно важные при обучении математике, специфические черты самой математики и ее применений. Во второй главе формулируются и обсуждаются десять основных принципов, которые можно положить в основу обучения математике.

Следует отметить, что, как всякие подобные сочинения, эта книга, несмотря на все стремление автора быть объективным, имеет в определенной степени субъективный оттенок, поскольку основными доводами в ней являются размышления автора, подкрепляемые отдельными конкретными примерами. На самом деле в ряде случаев, чтобы убедиться в истинности высказываемых утверждений, полезен был бы более строгий подход. Поясню сказанное на примере. Нередко в жизнеописании того или иного математика мы читаем, что он любил музыку. Из этого легко сделать вывод, что, как правило, математики — любители музыки. Может быть, это и так на самом деле, однако указанное обоснование вывода недостаточно убедительно. Достоверное обоснование можно провести лишь на основании правильно подобранных статистических данных. Автор должен искренне признаться, что он не использовал каких-либо статистических материалов, хотя ему и представляется, что в ряде рассмотренных случаев это было бы весьма полезно сделать. В результате можно было бы объективнее и глубже понять как процесс творчества математиков, так и процесс обучения математике. Но это уже новая задача для другой книги.

Большую помощь автору при подготовке первого издания этой книги оказала доцент Т. С. Пиголкина, внимательно прочитавшая весь текст и сделавшая много полезных замечаний, за что автор выражает ей свою искреннюю и глубокую благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

При чтении этой книги необходимо иметь в виду, что всякий педагогический процесс является весьма сложным и многогранным явлением, включающим в себя, в частности, очень важный вопрос воспитания личности, ибо для того, чтобы быть полноценным специалистом, недостаточно иметь хорошую квалификацию в своей области. Рано или поздно, на том или ином уровне каждому приходится сталкиваться с задачами, которые, быть может, и имеют специальный характер, но для принятия решения по которым оказывается недостаточно расчета, основанного на знании, а приходится принимать во внимание другие факторы, руководствоваться чувством долга, нравственными принципами, моральными нормами, эмоциями. Уважение к этим общественным ценностям не приходит само собой — оно вырабатывается, оно воспитывается.

Каждому из нас приходится жить и работать в человеческом обществе, и надо это уметь делать так, чтобы быть полезным обществу, приятным самому себе и окружающим, чтобы общение с людьми помогало работе. Надо уметь не только следовать за обществом, но и уметь влиять, воздействовать на него. Надо не только знать о тех или иных положительных моральных категориях, но и поступать согласно им в своей повседневной жизни.

Как всего этого достичь? Как все это воспитать?

Когда говорят о преподавании какого-либо предмета, то нередко приходится слышать, что для успеха дела нужны два качества: хорошее знание предмета и (добавляют некоторые) хорошее знание языка, на котором ведется преподавание. Безусловно, эти качества необходимы преподавателю, но они не достаточны для того, чтобы надежно гарантировать успешное обучение. Преподаватель, обладающий указанными качествами, при всей своей увлеченности предметом далеко не всегда сумеет научить своих учеников тому, чему хочет, и, тем более, далеко не всегда сумеет воспитать у студента нужные качества научного работника, исследователя, конструктора, инженера, ученого-организатора, педагога, врача и т. п. Их невозможно воспитать без воспитания высоких общечеловеческих моральных качеств: любви и уважения к людям, гуманного к ним отношения, доброты, справедливости, честности, принципиальности, самокритичности, мужества, настойчивости и скромности, добросовестного отношения к своим обязанностям, органической потребности в труде, без того, чтобы эти черты стали обычной нормой поведения. Поэтому важнейшей и наиболее трудной частью является не профессиональное обучение, а морально-нравственное воспитание. Все это хорошо известно с античных времен. Еще Сократ в диалоге Платона «Менексен» говорит: «И всякое знание, отделенное от справедливости и другой добродетели, представляется плутовством, а не мудростью». Да и гуманисты эпохи Возрождения считали истинным только то, что служило людям на пользу, было добром, и то, что было прекрасным.

Процесс воспитания, как и процесс образования в целом, имеет два полюса: воспитателей-преподавателей и воспитуемых-обучающихся. Успех этого процесса, прежде всего, зависит от преподавателей, к которым поэтому должны предъявляться высокие требования. Только тот имеет право воспитывать и только тот будет это делать успешно, кто чувствует ответственность за свою работу, интересуется ею, любит ее, испытывает чувство волнения за ее исход, убежден в правильности тех принципов, которыми он руководствуется, кто тактично относится к людям, умеет терпеливо выслушивать чужое мнение и ненавязчиво отстаивать собственную точку зрения, тот, кто внимателен к окружающим, заботится о них, испытывает удовольствие от общения с ними, искренне радуется их успеху, и тот, кто, когда к нему обращаются с просьбой, не ищет, как в ней отказать, а ищет пути, как ее выполнить.

Успех воспитательной деятельности немыслим без того, чтобы преподаватели являлись носителями всех тех качеств, которые они стремятся воспитать у студентов, чтобы отношения между преподавателями были такими, какими они хотят их видеть между студентами, чтобы они разговаривали друг с другом так, как бы они хотели, чтобы разговаривали между собой студенты, чтобы они были со студентами так же вежливы, как они хотели бы, чтобы с ними были вежливы студенты.

Только тот предподаватель сможет добиться успеха в воспитании студента, которого студенты любят и уважают за его увлеченность своим делом и добросовестное отношение к своей работе, к своим обязанностям, за его доброту и человечность, принципиальность и объективность, нетерпимость к несправедливости, короче, который пользуется у них авторитетом и как специалист своего дела, и как просто человек.

Только при наличии контакта между студентами и преподавателями, при наличии между ними атмосферы доверия, взаимоуважения и взаимопонимания можно достичь настоящих успехов в воспитании студентов.

Само собой разумеется, что малейший оттенок фальши или ханжества в отношении преподавателей к студентам совершенно недопустим. Доброту, основанную на внимании к человеку, на заботе о нем, на доброжелательности, на альтруизме, т. е. Доброту с большой буквы, если так можно сказать, нельзя заменить «внешней добротой», присущей некоторым людям, равнодушным, безразличным к другим, эгоистичным, для которых слыть добряками спокойнее и удобнее, поскольку это не требует активных действий. Истинная искренняя бескорыстная доброта не может быть пассивной — она всегда активна.

Человек ... родился быть господином, повелителем, царем природы, но мудрость, с которой он должен править..., не дана ему от рождения: она приобретается учением.

Н. И. Лобачевский

Глава I

ОБ ОБЩИХ ПРИНЦИПАХ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ

1. О СПЕЦИФИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

Дороги не те знания, которые отлагаются в мозгу, как жир; дороги те, которые превращаются в умственные мышцы.

Г. Спенсер

Трудности при обучении любому предмету возникают уже при отборе материала, которому собираются учить, и, быть может, еще больше при установлении принципов, которыми следует руководствоваться при обучении. Эти трудности усугубляются тем, что обычно каждый педагог, каждый специалист в своей области искренне убежден, что он хорошо знает, что́ и как надо преподавать по его специальности, и обычно весьма нетерпимо относится к другим мнениям по этим вопросам. Мало что подвергается такой постоянной критике, как существующая система образования. Здесь каждый чувствует себя компетентным, многие любят выступать с поучениями и стараются навязать свою точку зрения.

Это обстоятельство было подмечено еще Н. В. Гоголем. В «Ревизоре» смотритель училищ Лука Лукич Хлопов говорит: «Не приведи бог служить по ученой части, всего боишься. Всякий мешается, всякому хочется показать, что он тоже умный человек» *).

При обучении математике дело усложняется благодаря широкому ее использованию в разнообразных об-

*) Гоголь Н. В. Собр. соч. в пяти томах. Т. 4.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.

ластях науки и техники: нередко специалисты в этих областях совершенно искренне и бесповоротно убеждены, что они лучше других и, в частности, лучше самих математиков знают, в чем смысл математики, как и чему учить в ней. При этом каждый, как правило, исходит из своего объема математических знаний, считая, что надо знать именно то, что знает он, причем понимать это так, как понимает он.

Странным образом забывается, что обучение людей, как и всякая другая человеческая деятельность, требует своих профессионалов. Сложность постановки образования состоит, в частности, в том, что, во-первых, для того чтобы знать чему учить, надо прежде всего быть достаточно широко образованным человеком по своей специальности, т. е. быть хорошим профессионалом в какой-то области человеческого знания или деятельности. Профессионализм же в преподавании возможен лишь как дополнение к профессионализму по специальности. Во-вторых, процесс образования существенно отличается от других видов человеческой деятельности тем, что, каким бы образом он ни осуществлялся, люди все равно растут и обучаются, более того, они растут и чему-то научаются, если даже и вовсе не заботиться об их обучении и воспитании, что может привести (но, конечно, вовсе не обязательно) к плохим результатам как для самого индивидуума, так и для общества. Существенно то, что подобных плохих результатов удалось бы избежать во многих случаях, если бы своевременно было правильно поставлено обучение и воспитание.

Процессы образования и воспитания людей можно уподобить росту культурных растений, ибо эти процессы, с одной стороны, могут происходить без активного вмешательства человека извне, а с другой стороны, подобное вмешательство существенно влияет на результат. Конечно, в жизни людей происходит много процессов другого рода, которые не могут происходить сами собой, без «вмешательства извне» ни в какой степени. Например, дом не построится, если не будет людей, которые займутся его строительством. Растение же вырастет из семени, брошенного в землю и попавшего в благоприятные условия, даже если никто не будет за ним ухаживать. Однако каждый хорошо знает, что мало только посеять семена — для того чтобы получить желанный урожай, надо приложить определенные усилия.

Другой наглядный пример подобного рода дает прекрасный сад, постоянно находящийся в руках хорошего профессионала-садовника, по сравнению с садом, в котором те же цветы растут без всякого ухода. Впрочем, конечно, не следует забывать, что и среди бурьяна, лопухов и репейников может расцвести прекрасная дикая роза. Пока мы только ограничимся констатацией всех этих трудностей, а их анализом займемся несколько позднее на конкретном материале.

Прежде чем рассматривать вопрос о содержании и методах обучения, следует решить общую и вместе с тем весьма принципиальную задачу: на какие стороны психологии обучения следует обращать главное внимание и какими основными принципами следует при этом руководствоваться, чтобы учебный процесс был наиболее успешным?

Мне представляется, что такими принципами являются следующие: внушение учащемуся уверенности в его собственных силах и помощи ему, когда это для него необходимо. Следует обратить внимание на то, что здесь нет ни слова ни о порицании, ни тем более о наказании учащихся.

Убедительным и ярким примером пользы обучения, основанного на сформулированном положении, является многолетняя педагогическая деятельность учителя средней школы г. Донецка В. Ф. Шаталова, достигшего, как это хорошо известно, больших, ни с чем не сравнимых успехов в обучении своих учеников. Я думаю, что эти успехи в значительной степени были обусловлены тем, что В. Ф. Шаталов систематически применял указанные принципы в своей работе.

К сожалению, очень мало преподавателей вузов руководствуются в своей работе этими замечательными принципами. В результате часть студентов в процессе обучения в высшем учебном заведении постепенно теряет веру в свои силы и способность освоить то, что от них требуется.

Мало кто из абитуриентов, поступающих в институт, думает, что ему будет легко в нем учиться, но, конечно, почти каждый поступает с надеждой, что он сумеет справиться с трудностями, которые его ожидают. А трудности для многих школьников большие. Эти трудности связаны с большой плотностью информации, которую они получают с первых дней обучения в институтах, с нехваткой времени, чтобы с ней свыкнуться, и тем более, чтобы ею овладеть, с высокой требовательностью, которая к ним предъявляется, с необходимостью уметь правильно распределять свое время, с неумением напряженно работать, вовремя и правильно отдыхать, усваивать материал на нужном уровне (который большинство первокурсников представляет себе весьма туманно). В такой ситуации нетрудно оступиться, ошибиться, не справиться с чем-либо, не суметь сделать что-то часто просто потому, что не известно, как это делать, как к этому подступиться. Это совершенно естественные затруднения.

Не надо забывать, что первокурсники еще дети, хотя часто они и выше нас ростом. Наблюдаемая акселерация развития нового поколения, о которой так много говорят в настоящее время, больше связана с физическим развитием, чем с духовным. Ведь способность и скорость усвоения нового материала за последние десятилетия, по существу, не изменились.

Если студент начинает не успевать, то его обычно порицают, бранят, отчего он часто теряет остатки веры в собственные силы. Преподаватель же, видя, что студент не справляется с требуемой работой, часто приходит к убеждению, что такому студенту нецелесообразно продолжать обучение в институте, чем и обусловливается все его дальнейшее отношение к этому студенту, которое в лучшем случае можно выразить словами «махнул на него рукой». По-настоящему, преподаватель с этого момента не имеет уже морального права продолжать обучение студента, ибо научить, как правило, можно только тогда, когда веришь, что можешь это сделать.

Гораздо более эффективными в большинстве подобных случаев являются не слова порицания, а слова ободрения. Очень важно, когда студенту трудно, отнестись к нему внимательно, найти пусть самый небольшой успех в его работе и похвалить его за это. Когда студент не выполнил работу, надо исходить не из того, что он лентяй и неспособный, а из того, что он хотел, но не смог сделать нужную работу, так как ему не хватило опыта, умения, а может быть, и времени (в результате того, что он просто не сумел, а может быть, по каким-либо причинам и не имел возможности распорядиться им нужным образом), и постараться заставить его поверить, что приобрести необходимое умение вполне в его силах.

Итак, представляется, что, хотя наиболее распространенными методами воспитания студентов (и детей тоже) являются порицание, отчитывание их за те или иные прегрешения и наказание за них, было бы гораздо целесообразнее, чтобы эти методы воспитания применялись крайне редко, лишь как исключение.

Преподаватель, как и всякий воспитатель, должен стремиться не наказать студента за тот или иной проступок, а уделить основные силы и время предупреждению таких проступков и устранению причин, их порождающих, воспитанию в студенте активности, деятельности в нужном направлении. Для этого поощрение является одним из лучших методов. Следует значительно чаще, чем это обычно делается, хвалить, быть может даже не достаточно заслуженно, учащихся, и уж ни в коем случае не забывать об этом, когда к тому есть явные причины. Если учащийся нуждается в ободрении, то следует не посчитать за труд найти причину, чтобы сказать ему нужные слова. Проявляя доброту, великодушие, внимание к учащемуся, мы тем самым воспитываем в нем те же качества. Неконтролируемое доверие, оказываемое предподавателем, обычно является весьма успешным методом обучения и стимулирует развитие интересов у учащихся.

Все это, конечно, ни в коей мере не исключает разумную строгость и требовательность в процессе обучения. В частности, особенно важна справедливость и объективность (при доброжелательном отношении) при оценке знаний студентов на экзаменах. Трудно переоценить вред, наносимый подготовке будущих специалистов искусственным завышением успеваемости студентов посредством проведения в жизнь принципа «по возможности не ставить неудовлетворительных оценок».

Безусловно, очень полезным является и регулярный контроль над работой учащихся. Правильно поставленный, он помогает им организовать систематические занятия, выявить в изучаемой дисциплине главное и основное, распределить нужным образом время занятий, а преподавателю помогает оказать учащемуся в нужный момент необходимую помощь — все это является надежной гарантией успеха обучения.

Принцип регулярного контроля нисколько не противоречит принципу бесконтрольного доверия учащемуся: ни тот, ни другой не следует понимать в абсолютном смысле. Умение совмещать эти принципы в процессе обучения с пользой для учащихся зависит, конечно, от опыта и такта преподавателя.

В связи со всем сказанным возникает естественный вопрос: на основании каких данных можно делать заключение об основных принципах преподавания? Имеются два пути: путь дедукции, умозаключений из общих соображений, и путь педагогического эксперимента, путь накопления опыта. Обычно используются одновременно и тот и другой.

Следует особенно подчеркнуть ответственность тех, кто ставит педагогический эксперимент, подчеркнуть их ответственность за выводы, которые делаются на основании этого эксперимента, и за рекомендации, которые часто даются для повсеместного их претворения в жизнь. Дело в том, что педагогический эксперимент существенно отличается от эксперимента, например, в физике, химии, биологии и т. п. Педагогический эксперимент нельзя повторить в тех же условиях, в которых он был проведен; его результат очень зависит как от индивидуальности обучаемых, так и от индивидуальности обучающих. Одна и та же методика, успешно примененная в одном случае, может оказаться совершенно непригодной в другом, например, в руках менее искусного педагога или при другом составе учащихся. В педагогическом эксперименте очень легко увидеть то, что хочется, а не то, что есть на самом деле, в частности, и потому, что отсутствует четкая мера для измерения результата эксперимента. Обо всем этом нельзя забывать.

Большое значение имеет принципиальная оценка итога обучения: если обучение чему-то, проведенное, скажем, заведомо добросовестными и достаточно хорошо эрудированными предподавателями, закончилось неудачей, то кто виноват? Обычно в этом случае педагоги, слагая с себя ответственность, говорят, что виноваты учащиеся — они не выучили того, что должны были выучить. Если же возникает вопрос, могли ли учащиеся на самом деле выучить то, что от них требовалось, то на него следует ответ: если не могли, то им незачем здесь учиться. Приверженцами такой точки зрения большей частью являются люди, занимающиеся преподаванием, но не желающие обсуждать вообще вопросы методики преподавания, считая это пустой тратой времени. Впрочем, ее нередко разделяют и педагоги, относящиеся с достаточным уважением к методике преподавания, но, конечно, и те и другие абсолютно убеждены, что они знают, как надо преподавать, и не допускают и тени сомнения в своих, пусть даже интуитивных, принципах преподавания.

Мы же будем исходить из положения, что виновником неудачи обучения всегда является педагог, а не учащийся, что обязанностью педагога является не только учить, но и научить, и что последнее всегда возможно.

Конечно, существуют студенты, которые не хотят учиться, но желают получить диплом высшего учебного заведения. Перед такими студентами преподаватель может оказаться бессильным в своем стремлении научить их тому, чему он должен их научить. Будем считать, что подобный студент представляет собой, говоря математическим языком, «особую точку». В отдельных случаях множество подобных особых точек может оказаться довольно массивным — это, безусловно, ненормальное явление, и необходимо все силы приложить к тому, чтобы это множество оказалось пустым. Во всех последующих рассуждениях мы не принимаем во внимание эти особые точки.

Само собой разумеется, что высказанное положение предполагает, что преподаватель не перегружен работой в аудитории или какой-либо другой, а имеет возможность нормально готовиться к чтению лекций и проведению практических занятий. При завышенной нагрузке преподавателя с него, конечно, нельзя требовать хорошей работы.

Основой для сформулированного утверждения об ответственности педагога является убеждение в том, что каждый нормальный человек может овладеть любым родом умственной деятельности, в том числе и правильным использованием математических методов, на таком уровне, что он будет нужным, полезным и надежным специалистом своего дела. Вот что писал по этому поводу В. П. Ермаков: «Говорят, что для изучения математики нужны особенные способности; это мнение ошибочно; для математики нужно логически правильное мышление. При правильном воспитании эта способность может быть развита у каждого ребенка. Цель школьного обучения должна заключаться в развитии логически правильного мышления» *).

*) Ермаков В. П. Анализ бесконечно малых величин. Ч. 1.— Киев, 1907.

Подобная точка зрения зафиксирована и в рекомендациях XIX Международной конференции по народному образованию, созванной ЮНЕСКО и БИЕ *) в Женеве в 1956 году: «...психология установила, что практически каждое человеческое существо способно к определенной степени математической деятельности и, в особенности, что нет никаких оснований утверждать, что девочки менее способны к математике, чем мальчики...», «...математическое образование есть благо, на которое имеет право каждое человеческое существо, каковы бы ни были его национальность, пол, положение и деятельность...» **).

При такой постановке вопроса существенно возрастает ответственность преподавателя за выполняемую им работу, ответственность, о которой, к сожалению, многие преподаватели имеют весьма отдаленное представление.

Противники высказанной точки зрения нередко возражают, что мало наличия у учащегося потенциальной способности к обучению и пассивного желания обучиться, надо чтобы он испытывал интерес к изучаемому предмету. Это мнение естественным образом возникает в силу того, что обучение учащихся, которые учатся с интересом, часто протекает легко, требует сравнительно небольшой затраты труда и оказывается весьма эффективным, в то время как обучение учащихся средней или высшей школы, не проявляющих интереса к изучаемому предмету, требует весьма значительных усилий, и не только часто не приносит чувства удовлетворения педагогу, а наоборот, доставляет неприятности, в том числе и служебного характера.

В результате возникает резонный вопрос: есть ли вообще смысл учить человека, например, математике, если он не проявляет к ней интереса, не имеет к ней склонности? Не лучше ли его научить, например, хорошо работать на токарном станке? Этот вопрос связан, конечно, прежде всего, с правильным выбором профессии. Проблема выбора профессии очень сложна, и мы не будем ее анализировать, так как это увело бы нас слишком далеко от нашей основной темы.

---

*) ЮНЕСКО — Организация Объединенных наций по вопросам образования, науки и культуры, БИЕ — Международное бюро по просвещению.

**) Математическое просвещение. Вып. 1.— М.: Гостехиздат, 1957, с. 15—22.

Ошибки при выборе профессии, безусловно, случаются, поэтому бывают и ошибки у абитуриента при выборе института, в который он поступил учиться. Однако это исключение. Обычно юноши и девушки выбирают институт в соответствии со своими личными склонностями и интересами и пребывают в начале обучения в уверенности, что они сумеют овладеть выбранной ими профессией.

Случается, правда, что поступивший в тот или иной институт плохо представляет себе реальные трудности обучения в этом институте, в частности трудности, связанные с изучением смежных дисциплин, например, математики, необходимых для успешного освоения основной специальности. Столкнувшись с такими трудностями, он начинает плохо успевать, в связи с чем у него начинает уменьшаться интерес к изучаемым предметам. Вот в этот-то момент и раздаются обычно голоса: «Зачем учить тех, кто не хочет учиться?» При этом забывают о том, что студент пришел в институт не с намерением бить баклуши, а чтобы учиться, что для освоения предметов, изучаемых в высших учебных заведениях, не требуется никаких специфических способностей, никаких особых черт характера, что нежелание учиться у студента появляется, как правило, в результате неправильного построения учебного процесса, что педагог обязан быть мудрее ученика, так как мудрость — это ум, обогащенный прежде всего знанием и опытом, а в том и другом учитель должен иметь неоспоримое преимущество перед учеником.

Всегда можно и нужно научить учащегося тому, что необходимо для поставленных целей обучения, даже если он на данном этапе не понимает, как будет использоваться в дальнейшем изучаемый им в настоящее время материал. Такого понимания, к сожалению, не всегда можно добиться, и в подобной ситуации нет ничего страшного, если только на самом деле обучение происходит именно тому, что необходимо. Чтобы это было действительно так, тратится много времени на создание и совершенствование учебных планов и программ.

Однако одних программ и учебных планов недостаточно, чтобы обучение осуществлялось наиболее рациональным образом и с оптимальной пользой для дела. Важное значение для успеха имеет правильно поставленная и хорошо продуманная вплоть до деталей методика преподавания. Получаемый при этом хороший конечный результат сторицей оправдывает все усилия, затраченные на продумывание методики обучения. Особенно большую роль она играет тогда, когда нужно преодолеть нежелание, внутренний протест учащегося или когда у него имеется лишь незначительно выраженный, пассивный, если так можно сказать, интерес к изучаемому предмету. Не менее важна правильная методика и в том случае, когда учащийся достаточно интересуется предметом, однако у него нет внутренней уверенности в том, что он способен им овладеть в нужной степени. В этой ситуации, которая встречается весьма часто, один неосторожный шаг педагога, одна его бестактность могут привести к потере у учащегося всякого интереса и, как следствие этого, к принятию им тех или иных, по существу, необоснованных решений, которые нанесут ему трудно поправимый вред.

Внимательное и продуманное отношение к студенту помогает правильному окончательному выбору его будущей специальности, способствует наиболее полному раскрытию его индивидуальных способностей. Случается, что окончательный выбор специальности оказывается совсем не тем, который намечался первоначально.

Так, например, в Московском физико-техническом институте, который готовит инженеров-физиков в различных областях современной науки и техники (несколько лет назад в МФТИ был, кроме того, создан факультет управления и прикладной математики), изучение математики для большей части студентов является не самоцелью, а неизбежной необходимостью, обусловленной тем, что математические методы играют большую роль при изучении физических явлений. Встречаются студенты, которые не имеют вкуса и интереса к математике, не понимают важности владения ею для своей будущей специальности и, более того, убеждены, что она им будет не нужна (и уж во всяком случае в том объеме, в котором она им предлагается в процессе обучения). Тем не менее преподавание математики в МФТИ удалось поставить таким образом, что все студенты, как правило, приобретают достаточно высокую математическую культуру и фундаментальные знания, позволяющие им в случае надобности овладеть дополнительными знаниями по математике, необходимыми для их дальнейшей работы.

Оригинальная система обучения математике, созданная в МФТИ, характеризуется достаточно глубоким изучением основных математических понятий и неперегруженностью второстепенными деталями. Большое внимание обращается на постоянные контакты преподавателей со студентами, на индивидуальную работу с каждым студентом, на своевременную помощь, на максимальное содействие развитию у него инициативы и навыков самостоятельной работы, на воспитание на основе прочных знаний уверенности в собственных силах. Все это вместе взятое позволяет более широко и свободно, чем обычно, раскрыться индивидуальным математическим наклонностям отдельных студентов. Это не раз приводило к тому, что они выбирали себе специализацию с более сильным математическим уклоном, чем предполагали вначале, а иногда становились просто математиками и даже не прикладными, а «чистыми», достигая в математике больших, а порой и выдающихся успехов.

Впрочем, надо сказать, что те из выпускников МФТИ, кто в своих занятиях математикой использовали свое физическое образование, черпали постановки проблем из прикладных задач и при их математическом решении прибегали, когда надо, к помощи физической интуиции, имели безусловное преимущество перед своими коллегами, получившими чисто математическое образование. Это преимущество во многом способствовало незаурядному успеху многих из них.

Подчеркнем еще, что вопросами методики преподавания нельзя пренебрегать и при обучении учащихся, которые хотят учиться, учатся с интересом, имеют природные склонности к изучаемому предмету и, скажем, имеют даже повышенные способности. И в этом случае неправильно поставленное обучение может привести к тому, что учащиеся усвоят изучаемый ими материал формально, не овладеют им по существу, а потому понапрасну потратят драгоценное время. Может случиться, например, что в результате перегруженности получаемой информацией и практической невозможности ее освоить даже способный учащийся может потерять интерес к изучаемому предмету и оказаться вынужденным (ввиду необходимости сдачи зачетов и экзаменов) недобросовестно относиться к изучению соответствующей дисциплины. Конечно, даже при такой ситуации учащийся чему-то научится. Однако это не возместит ему ни зря потраченного времени, ни нанесенного ему ущерба в связи с приобретением им опыта недобросовестной работы.

Обучение должно быть построено таким образом, чтобы в его процессе учащийся, получая знания, удивлялся и восхищался мудростью тех, кто принес людям эти знания, удивлялся и восхищался гармонией (а там, где ее нет, удивлялся дисгармонии) вещей, с которыми его знакомят, чтобы он по существу оценивал смысл и значение приобретаемых знаний.

Осуществить это совсем не просто. Эмоциональное восприятие законов природы и даже новых открытий с возрастом существенно меняется. Зрелый ученый безусловно лучше может оценить глубину, широту и красоту мысли, но вряд ли, излагая давно известные ему факты, он сможет пережить ту радость первичного познания, тот наивный восторг, который переживает студент, лишь начинающий познавать законы мироздания, или молодой исследователь, делающий первые успешные шаги в своей самостоятельной работе. Об этих различных восприятиях одних и тех же вещей никогда не следует забывать педагогу.

Одним из необходимых условий для получения студентом по-настоящему твердых знаний, является наличие достаточного времени для того, чтобы он имел возможность усвоить и обдумать полученную информацию.

Чрезмерная поспешность при обучении может существенно уменьшить его пользу. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию.

Серьезное учение — это большой многосторонний и разнообразный труд, далеко не всегда приятный, временами черный и тяжкий, но тем не менее необходимый для получения полноценного высшего образования; и преподаватели высших учебных заведений должны помочь студентам осознать это.

Эффективность учения, как всякого труда, во многом зависит от его организации. В частности, обучение, протекающее таким образом, что у учащегося поддерживается постоянный интерес к изучаемому предмету, что весь процесс обучения доставляет ему удовольствие (даже тогда, когда приходится преодолевать существенные трудности), приводит не только к приобретению прочных профессиональных знаний, но и к воспитанию органической потребности в труде, к тому, что труд в дальнейшей жизни будет приносить чувство удовлетворения и искренней радости.

Конечно, организация обучения указанным образом является очень трудной задачей. Здесь, как нигде, имеет огромное значение индивидуальное искусство преподавателя, его собственное отношение к профессии преподавателя и к предмету, которому он обучает.

В связи с этим следует отметить еще один часто встречающийся недостаток преподавания, наблюдаемый даже у весьма квалифицированных преподавателей и состоящий в том, что они забывают, что выбрали свою профессию по своим природным склонностям, согласно свойствам своего мышления, что они увлечены своей профессией, что для них она является часто самым главным, самым важным в жизни, забывают о том, сколько времени при всех своих способностях они потратили на овладение своей профессией, забывают, наконец, о том, что предмет, которому они обучают студента, может быть ему чужд по своему внутреннему стилю, не вызывает у него интереса, что изучает он его по необходимости, что встретился он с ним первый раз и что времени у него мало.

Обо всем этом хорошо и выразительно сказал А. Н. Крылов: «В основу учебных планов кладутся программы. Каждая программа составляется профессором, заведующим кафедрой и преподавателями по этой кафедре, т. е. специалистами по данному предмету, и они всегда склонны изложить предмет «в полном его объеме», как бы забывая, что сами они в своей преподавательской деятельности изучали свой предмет, может быть, 15, 20, 25 лет, а то и более, а студент на изучение этого предмета может уделить лишь небольшую часть года или полугодия, ибо одновременно студенту надо изучить и ряд других предметов, в равной степени обязательных, и сдать по ним экзамены и зачеты» *).

Следует еще добавить, что если измерять успех педагогического процесса не тем, что «начитано на лекции», а тем, что в результате усвоено студентами, то

---

*) Крылов А. Н. Воспоминания и очерки.— М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 623.

существующую во многих высших учебных заведениях традицию заканчивать чтение лекций почти перед самым началом экзаменационной сессии вряд ли можно признать целесообразной, поскольку она просто не даст студентам времени и возможности овладеть нужным образом материалом, изложенным на лекциях. Было бы гораздо полезнее, если бы между окончанием лекций, в которых излагается новый теоретический материал, и началом экзаменационной сессии был бы трех-четырехнедельный интервал, во время которого интенсивно велись бы практические и семинарские занятия, а для желающих проводились дополнительные консультации, читались обзорные лекции по пройденному материалу и о методах решения задач. Там, где так и делается, этому сопутствует неизменный успех в усвоении студентами изучаемой дисциплины.

Отсутствие взаимопонимания между студентами и преподавателями — большой недостаток любого педагогического процесса. Надо всегда помнить о том, что недостаточно руководствоваться правильными принципами (точнее, принципами, которые преподаватель сам считает правильными, поскольку установить объективные критерии, по которым можно было бы судить, какой принцип является правильным, а какой нет, нередко не представляется возможным), надо уметь воплотить их в своей работе, в лекциях, на практических занятиях. Как это делать — заслуживает подробного и самостоятельного изучения. Мы еще вернемся к этому.

2. О ВОСПИТАНИИ

> Как страшен может быть разум, если он не служит человеку.
>
> *Софокл*

> Тому, кто не постиг науки добра, всякая иная наука приносит лишь вред.
>
> *Монтень*

Воспитание является неотъемлемой частью всякого образования. Воспитательская деятельность при обучении математике имеет свои специфические черты, связанные с природой самой математики, и они должны, безусловно, максимально использоваться педагогом.

Поясним более подробно эту сторону математического образования. Изучение математики совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ее, приучает человека логически рассуждать, воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации. Математика учит не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и, наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого вопроса. Все это дает возможность эффективно исследовать и осмысливать новые задачи, возникающие в различных областях человеческой деятельности.

Весьма выразительно черты математического образования, влияющие на культуру человека в целом, были сформулированы в докладе В. Сервэ на XIX Международной конференции по народному просвещению: «Среди интеллектуальных свойств, развиваемых математикой, наиболее часто упоминаются те, которые относятся к логическому мышлению: дедуктивное рассуждение, способность к абстрагированию, обобщению, специализации, способность мыслить, анализировать, критиковать. Упражнение в математике содействует приобретению рациональных качеств мысли и ее выражения: порядок, точность, ясность, сжатость. Оно требует воображения и интуиции. Оно дает чутье объективности, интеллектуальную честность, вкус к исследованию и тем самым содействует образованию научного ума.

Изучение математики требует постоянного напряжения, внимания, способности сосредоточиться; оно требует настойчивости и закрепляет хорошие навыки работы.

Таким образом, математика выполняет важную роль как в развитии интеллекта, так и в формировании характера».

Добавим к этому, что основной задачей преподавания математики, наряду с обучением самой математике, является задача научить человека думать. Здесь у преподавателя имеется много возможностей проявить свой педагогический талант. Преподаватель должен научить учащихся четко формулировать постановку задач и уметь разбираться в том, что является истинным решением задачи и что пустым суесловием. Обучение математике дает педагогу и блестящую возможность не просто научить человека думать, а подходить к изучаемым явлениям диалектически, так как вся математика (как и всякая другая естественная наука) и все ее развитие проникнуты диалектикой. В процессе преподавания математики педагог может проиллюстрировать все основные законы диалектики на примерах взаимосвязи развития математики и других наук, взаимосвязи развития отдельных областей математики, беспрерывного обновления и непрерывного движения в математике и ее приложениях, возникновения новых направлений и отмирания ряда старых, перехода количества в качество и т. д. и т. п. Во всех этих вопросах профессиональное обучение тесно переплетается с общечеловеческим воспитанием.

Внутренняя логическая стройность математики и неожиданные внутренние связи в ней не могут не восхитить человека, не поразить его эстетические чувства. Вот что писал по этому поводу Г. Харди: «Творчество математика в такой же степени есть создание прекрасного, как творчество живописца или поэта, — совокупность идей, подобно совокупности красок и слов, должна обладать внутренней гармонией. Красота есть первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике». Не менее выразительны и слова Ф. Хаусдорфа: «Есть в математике нечто, вызывающее человеческий восторг». Поэтому математика дает богатые возможности для воспитания чувства красоты, для воспитания умения увидеть красоту и оценить ее по достоинству.

Обучение математике дает также возможность воспитывать в молодом человеке честное добросовестное отношение к делу. Ведь усвоить в математике теорию или решить задачу невозможно, не разобравшись в них и не продумав их самостоятельно. Учащийся, когда у него не получаются задачи, которые он был обязан сделать, объективно убеждается в том, что он самостоятельно не справился с заданием либо из-за недостаточного владения теорией, либо из-за недостатка практики в решении задач. Именно поэтому изучение математики воспитывает серьезное и добросовестное отношение к труду, ибо учение — это, прежде всего, труд.

Далее, изучение математики, как никакой другой науки, приучает учащегося работать систематически, последовательно и настойчиво: если не освоен предшествующий раздел, то, как правило, в математике нельзя разобраться в последующем.

Большие возможности изучение математики дает для развития умения анализировать собственные ошибки, для развития критичного отношения к своим способностям и действиям. Умение объективно заниматься самоанализом является одним из больших достоинств человека, а воспитать это качество совсем не просто. Вот что писал об этой черте характера Ф. М. Достоевский: «Всех умней, по-моему, тот, кто хоть раз в месяц самого себя дураком назовет,— способность ныне неслыханная» *).

В математике, как нигде, можно по-настоящему оценить помощь товарища или учителя: когда долго не удается решить задачу, достаточно бывает небольшого намека на идею, чтобы задача была решена.

Математика, как никакая другая дисциплина, дает возможность объективно оценивать уровень знаний: учащемуся по пройденному им материалу предлагаются задачи (как имеющие алгоритмическое решение, так и требующие определенной изобретательности для их решения), которые он должен решить, и теоремы, которые он должен доказать. Только от того, решил он задачи или нет, доказал ли он теоремы или нет, зависит оценка, которую он получит. При этом важно то, что сам экзаменующийся может установить для себя, решена задача или нет, доказана теорема или нет, т. е. сами эти факты и оценка не зависят от субъективного отношения экзаменатора, а являются объективной истиной. Поэтому при изучении математики имеются богатые возможности для воспитания чувства справедливости и объективности.

Из всего сказанного следует, что действительно преподавание математики можно использовать для воспитания объективности, честности, справедливости, чувства красоты, добросовестности, настойчивости, любви к труду, самокритичности.

Однако, конечно, было бы более чем наивно думать, что, обучив кого-то хорошо математике, мы попутно воспитаем и высоконравственного человека. Увы, это не так. Имеется много положительных с точки зрения

*) Достоевский Ф. М. Полное собрание сочинений в 30 томах, Т. 21.— М.: Наука, 1982, с. 42.

общечеловеческой морали качеств (например, чувство дружбы, товарищества, человеколюбия, недопустимости клеветы и т. д.), которые непосредственно не связаны с математикой, что, впрочем, вовсе не означает, что преподаватель математики не должен стараться воспитать их в своих учениках — это его прямая обязанность как педагога.

В заключение заметим, что, само собой разумеется, далеко не все принципы, которые хорошо действуют в математике, буквально переносятся на жизненные ситуации, где нет таких четких логических категорий, как в математике. Следует всегда помнить, что законы формальной логики, а значит и математические закономерности, не адекватны реальной жизни. Если, например, в обычной математической логике действует закон исключенного третьего (имеет место либо событие A, либо не A), то, как остроумно сказал один мой знакомый, в жизни это исключенное третье может оказаться самым важным, самым существенным. Это означает, что в жизни мы для данного события A стараемся всегда дать позитивное определение события «*не* A» без отрицания, т. е. строим логическую модель некоторого реального события, в данном случае события «*не* A». При этом, как при любом построении логической модели реального объекта, отбрасываются какие-то свойства события A. Иначе говоря, описанное таким образом событие «*не* A» является отрицанием события A лишь с некоторым приближением, полученным за счет пренебрежения какими-то характеристиками события A. Именно эти характеристики мы и назвали в данном случае «исключенным третьим», и может случиться, что они-то и играют самую существенную роль для данного события, но, увы, это нами еще не понято, а тогда решение рассматриваемой практической задачи, полученное с помощью построенной модели, может оказаться ошибочным.

Но дело, безусловно, не только в этом. Невозможность часто использовать непосредственно в жизни математическое, да и вообще научное абстрактное мышление, связана с большим духовным богатством человеческой личности, которой свойственны не только, например, разум, но и чувства. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, приведу лишь высказывание по этому поводу М. Борна: «Человеческие и этические ценности не могут целиком основываться на научном мышлении... Сколь ни привлекательно для ученого было бы абстрактное мышление, какое бы оно ему ни приносило удовлетворение, какие бы ценные результаты оно ни давало для материальных аспектов нашей цивилизации, чрезвычайно опасно применять эти методы там, где они теряют силу,— в религии, этике, искусстве, литературе и других гуманитарных сферах человеческой деятельности» *).

Таким образом, трудностей и сложностей в воспитании более чем достаточно, но это вовсе не означает, что следует опускать руки, наоборот, воспитанию надо уделять гораздо больше внимания, чем это делается в настоящее время. Преподаватель высшего учебного заведения обязан требовать от студента соблюдения общепринятых норм поведения и следования моральным устоям цивилизованного общества. На преподавателях математики лежит особая ответственность за воспитание студентов, поскольку кафедра математики (прежде всего, в силу учебных планов) общается со студентами часто значительно больше, чем многие другие кафедры.

3. О ЛЕКЦИЯХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

> Учиться надо только весело... Чтобы переварить знания, надо поглощать их с аппетитом.
>
> *А. Франс*

Лекция занимает особое место в учебном процессе: она играет в нем основополагающую роль, направляет его, определяет его содержание и уровень. Поэтому от качества лекций во многом зависит и качество всего обучения в целом. Само собой разумеется, что содержание лекций должно отвечать высоким требованиям как в научном, так и методическом отношениях, достаточно полно освещать программный материал и представлять собой логически законченное его изложение. Объем сведений, сообщаемых на лекции, должен быть достаточным для того, чтобы студент, усвоивший их, мог выдержать соответствующий экзамен. Это, безусловно, не исключает того, что студент читает литературу по изучаемому вопросу. В этом случае лекции должны помочь ему ориентироваться в ней. Одна-

*) Борн М. Моя жизнь и взгляды.— М.: Прогресс, 1973, с. 128—129.

ко чтение литературы по всем предметам не должно быть обязательным: по некоторым предметам студент может ограничиться только содержанием лекций. В этом нет ничего плохого, так как усвоение хорошо прочитанных лекций достаточно для приобретения необходимых знаний.

Лекции не должны сводиться к более или менее дословному пересказу учебника, а должны иметь собственное лицо. Лекции должна быть свойственна бо́льшая легкость, бо́льшая непринужденность изложения по сравнению с книгой. Студент, посещающий лекции, должен чувствовать, что на лекциях он получает много того, что он не найдет в учебниках, что, слушая лекции, он тратит меньше времени на освоение предмета, чем при изучении его по книгам. Лектор сможет этого достичь только в том случае, если он тщательно подберет лекционный материал, так чтобы он содержал все принципиальное и необходимое, несмотря на его меньший, как правило, по сравнению с учебником объем, сумеет его естественно и, вместе с тем, эмоционально изложить, расставив нужные акценты и разъяснив доступно для слушателей трудные места. Хорошо, когда лекция читается так, что у слушателей создается ощущение соприкосновения с большой наукой. Если все это удается сделать, то живое слово лектора в аудитории невозможно заменить никаким печатным текстом, никаким учебным кинофильмом. Однако и этого мало, чтобы можно было признать лекцию хорошей и полезной.

Важным критерием оценки прочитанной лекции является то, как слушатели благодаря этой лекции овладели тем, что было в ней изложено. Для этого не достаточно, чтобы они поняли материал во время чтения лекции. Студент в случае необходимости должен иметь возможность вернуться к объяснениям лектора, а надеяться только на одну свою память неразумно — память вещь ненадежная. Надо, чтобы студенты и поняли лектора, и записали то, что он им рассказал. Ведь, очевидно, что большинство студентов может активно и успешно использовать лекции в процессе обучения, только имея достаточно хорошие их записи. Поэтому каждому лектору и преподавателю, ведущему практические занятия (их часто называют также семинарскими занятиями), даже в том случае, если он занимается педагогической деятельностью далеко не первый год, очень полезно время от времени брать непосредственно после лекций или занятий десяток тетрадей с записями, только что сделанными студентами, чтобы посмотреть, что же из того, чему он хотел научить студентов, у них зафиксировано. Если он в двух-трех тетрадях найдет не то, что он хотел бы увидеть, то в дальнейшем ему целесообразно попытаться внести необходимые изменения в свою методику, с тем чтобы в тетради любого студента было записано во всяком случае то, что он хочет.

Впрочем, как показывает опыт, этот совет практически очень трудно выполним, ибо лектор или преподаватель, ведущий семинарские занятия, который не был бы внутренне убежден, что он делает свою работу наилучшим образом и что поэтому ему нет нужды смотреть в тетради студентов, встречается очень редко. А ведь следует помнить, что контроль над записями студентов полезен еще и потому, что дает возможность преподавателю помочь им научиться заниматься, научиться работать, вести необходимые записи (все это также является, безусловно, обязанностью всякого преподавателя, о чем, к сожалению, обычно забывают). К этому можно лишь добавить, что еще реже встречаются преподаватели, которые, взяв у студентов записи после прочитанной ими лекции и проведенного ими занятия и не найдя в них того, что они хотели бы увидеть, посчитали виноватыми себя, а не студентов.

Это, конечно, очень жаль. По-видимому, при этом просто забывают, что преподавание является профессией и что тот, кто желает преуспеть в ней, должен не жалеть ни времени, ни энергии для овладения ею. Как и в случае любой другой профессии, одним это удается сделать легче, другим труднее.

Вспоминается один из лучших лекторов механико-математического факультета Московского университета 40—60-х годов. Его лекции отличались необычайной четкостью, ясностью и глубиною мысли, большой эмоциональностью и, при всем этом, легко записывались и хорошо усваивались. Вместе с тем, он рассказывал, что когда он начинал свою педагогическую деятельность, студенты, возмущенные невозможностью ни понять, ни записать его лекции, пришли к декану с просьбой заменить его другим лектором. Тогда он поставил себе целью овладеть методикой чтения лекций, отнесся к этому как к важному и серьезному делу и в результате достиг действительного, даже, можно сказать, удивительного, педагогического мастерства. Этот пример показывает, в частности, что не нужно отчаиваться, если что-то не ладится с преподаванием. Надо быть только самокритичным, проанализировать причины неудач и попытаться нащупать правильный путь исправления имеющихся недостатков. Если приложить серьезные усилия и быть достаточно терпеливым, то, как правило, всегда удается достичь положительных результатов и в конце концов научиться учить.

Подчеркнем, что лекция или семинарские занятия окажутся эффективными, конечно, лишь в том случае, когда преподаватель свободно владеет материалом, который он излагает, и, в частности, не пользуется какого-либо вида шпаргалками.

Небезынтересно вспомнить, что революционный Конвент Франции при создании Ecole Normale в 1794 году запретил профессорам, читающим лекции, пользоваться во время лекций своими записками *). Отметим, впрочем, что инструкция подобного содержания была значительно раньше предложена сенаторам русским царем Петром Великим.

Само собой разумеется, что запрет использовать записки во время чтения лекций нельзя понимать в категорической форме: в лекционном материале могут найтись отдельные места, которые требуют громоздких и сложных вычислений (в широком смысле этого слова) и которые по какой-то причине необходимо изложить на лекции.

Однако такая ситуация должна являться, конечно, исключением в математических курсах. Каждому лектору-математику полезно помнить совет Д. Гильберта: «Вычисления проводи не выше чем на уровне таблицы умножения» **), который он дал Г. Вейлю, начинающему свою педагогическую деятельность в университете.

Если все же необходимо провести на лекции достаточно сложные вычисления, то в подобном случае вполне допустимо для лектора воспользоваться во время лекции своими записями. Более того, это даже це-

---

*) Белл Э. Т. Творцы математики.— М.: Просвещение, 1979, с. 158.

**) Рид К. Гильберт.— М.: Наука, 1977, с. 140.

лесообразно, так как этим самым студентам показывается, что не всякую информацию, которая им сообщается, следует стараться полностью запомнить. При этом на экзаменах нужно не забыть разрешить студентам пользоваться конспектами по тем вопросам, которые лектор рассказывал на лекциях, прибегая к своим записям.

Нельзя, правда, не заметить, что разрешение студентам пользоваться своими конспектами при сдаче экзаменов бывает разумным не только в указанной ситуации.

Одно из существенных затруднений, возникающих при подборе лекторов, связано с тем, что принято считать, что доктор наук и тем более профессор может и должен уметь хорошо читать лекции. Это далеко не так. Даже замечательный ученый может быть лишен педагогических способностей.

Вот что, например, рассказывает секретарь Исаака Ньютона, его земляк и однофамилец Гемфри Ньютон, о педагогической деятельности своего патрона: «Редко уходил он из своей комнаты, за исключением только тех случаев, когда ему надо было читать лекции как люкасовскому профессору. Лекции мало кто посещал и еще меньше того понимал...» или еще: «Не найдя на лекции ни одного слушателя, Ньютон через четверть часа возвращался назад» *).

Этот пример не единичен. Можно вспомнить о лекциях замечательных немецких ученых физика, биофизика, физиолога и психолога Г. Л. Гельмгольца и физика Г. Р. Кирхгофа. Вот что вспоминал о них М. Планк: «Гельмгольц, очевидно, никогда как следует не готовился к лекциям, говорил все время запинаясь, причем необходимые данные извлекал из небольшой записной книжки, к тому же постоянно ошибался у доски, а нас не покидало такое чувство, как будто ему самому эта лекция по меньшей мере так же надоела, как и нам. Вследствие этого число слушателей мало-помалу уменьшалось, в конце концов остались только три человека... В противоположность этому Кирхгоф читал тщательно отработанный курс лекций, в котором была взвешена и стояла на своем месте каждая фраза. Ни словом меньше, ни словом больше. Но

*) Цитируется по книге С. И. Вавилова «Исаак Ньютон» (М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943).

в целом это действовало как нечто заученное наизусть, сухое и однообразное. Мы восхищались самим лектором, а не тем, что он говорил»*).

Разочарование М. Планка от лекций было так велико, что он даже заколебался, не бросить ли физику и не вернуться ли к музыке, которой он раньше усиленно занимался.

Примеры неудачных лекций можно легко умножить, но, конечно среди выдающихся ученых было немало и замечательных лекторов. Приведем несколько примеров крупных ученых, являвшихся одновременно и блестящими лекторами. Они читали лекции в разной манере, но их лекции всегда пользовались неизменным успехом. Прежде всего отметим австрийского физика Л. Больцмана. Л. Мейтнер писала о нем**): «Больцман благоговел перед великолепием законов природы, восхищался способностью человеческого разума, эти законы познающего. И он не стеснялся выражать свои чувства, что нас, его юных слушателей, очень увлекало».

А вот что писал Э. Пикар о Ш. Эрмите***): «Те, кто его слушал, сохранят всегда память об этом несравненном преподавании. Какие удивительные беседы серьезным тоном, временами вызывавшие восторг слушателей, когда по поводу самого, казалось бы, элементарного вопроса он умел открыть необъятные горизонты и когда рядом с сегодняшней наукой мы вдруг видели науку завтрашнюю». Э. Борель добавляет к этому****): «Самые сложные и сухие вопросы математики, казавшиеся самыми неинтересными, преображались, так как Эрмит видел их скрытую природу. Может быть, кто-нибудь и мог бы заставить понимать математику и восхищаться ею, как он, но никто не мог бы заставить полюбить ее так глубоко, как он».

И сам Э. Пикар был прекрасным лектором. Один из слушателей Пикара писал об его лекциях следующее: «Его изложение было таким живым и интересным, что

---

*) Планк М. Единство физической картины мира.— М.: Наука, 1966, с. 4.

**) Цитируется по книге Е. М. Кляуса и У. И. Франкфурта «Макс Планк» (М.: Наука, 1980, с. 23).

***) Цитируется по книге Е. П. Ожиговой «Шарль Эрмит» (М.: Наука, 1982, с. 36).

****) Там же, с. 36.

время уже не существовало для аудитории, всегда удивлявшейся, когда профессор, окончив лекцию, направлялся к ступенькам, чтобы покинуть амфитеатр. Аплодисменты звучали снова и на этот раз долго» *).

Превосходным лектором, пользовавшимся большим почитанием у своих слушателей, был Н. Н. Лузин. Слушавший его М. В. Потоцкий так описывает его лекции: «вся прелесть лекции академика Н. Н. Лузина была в том, что его лекция переставала быть лекцией в обычном смысле слова. Когда он говорил, то он не пересказывал учебника, не «излагал предмет». Это был не лектор, не докладчик, это был просто человек, ваш друг, замечательный рассказчик, который вам рассказывает о чем-то чрезвычайно важном, таинственном и необычайно интересном. Его голос, лицо — все жило и играло. И вы не смотрели на часы, не ждали перерыва или конца лекции. Вам хотелось, чтобы он рассказывал как можно дольше! Я думаю, что секрет его воздействия на слушателей состоял в том, что он обо всем говорил так, как будто это все было им лично пережито, добыто, исследовано и завоевано. Трудные места в науке были его трудностями, он сам их преодолевал. Удачная формула была его формулой, он говорил о ней так, как будто он сам ее вывел впервые здесь на лекции. Можно сказать, что он говорил не о чужом, а о своем»**).

Само собой разумеется, что лекторам, подобным Л. Больцману, Ш. Эрмиту, Э. Пикару и Н. Н. Лузину, не было необходимости брать записи своих лекций у студентов и смотреть, что они сумели записать. К сожалению, многие лекторы без достаточных на то оснований считают, что их лекции настолько хороши, что им нет необходимости заботиться об их совершенствовании.

Приведенные примеры подтверждают, какое большое значение для слушателей имеют мастерски прочитанные лекции, в частности, как они могут увлечь слушателей, заинтересовать их и тем самым определить направление их дальнейшей самостоятельной деятельности.

---

*) Цитируется по книге Е. П. Ожиговой «Шарль Эрмит» (М.: Наука, 1982, с. 190).

**) Потоцкий М. В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте.— М.: Просвещение, 1975, с. 115.

Способный одаренный студент может получить много полезного для себя даже из очень плохой лекции хорошего ученого, но это не может служить мерилом целесообразности и полезности подобной лекции, предназначаемой для широкого круга слушателей и имеющей своей целью способствовать приобретению ими прочных основ знаний и умению обращаться с ними.

Безусловно, сказанное не следует понимать в том смысле, что не каждому хорошему специалисту, крупному ученому следует читать лекции и вообще заниматься педагогической деятельностью. Конечно, нет. Нельзя переоценить пользу от непосредственного общения молодежи с активно и успешно творчески работающим специалистом. Поэтому, наоборот, надо стремиться к тому, чтобы все такие специалисты принимали деятельное участие в воспитании и обучении молодого поколения, читая прежде всего факультативные курсы, но отнюдь не превращая обязательные курсы в факультативные или так называемые спецкурсы. Прочитать лекцию по узкоспециальной теме для хорошо подготовленных слушателей, интересующихся темой лекции, значительно проще, чем прочитать лекцию по общим вопросам для широкой аудитории. Очень полезно, когда крупные ученые ведут научно-исследовательские семинары, руководят курсовыми, дипломными и диссертационными работами студентов и аспирантов. Этого рода деятельность дает возможность встречаться людям с общими интересами и стремлениями, между которыми быстро и просто устанавливается взаимопонимание и возникают полезные контакты, а вопросы методики обучения играют существенно меньшую роль, чем в процессе общего образования. Подчеркнем, что одной из задач и целей последнего является, в частности, создание необходимой прочной базы, на основе которой только и возможны плодотворные контакты с творческими специалистами.

Отметим еще, что педагогическая деятельность многогранна: кроме лекций и практических занятий, в нее входят выработка программ учебных курсов, руководство курсовыми и дипломными работами студентов, руководство научными и реферативными семинарами, руководство кафедрой, руководство аспирантами и т. п. За это присваиваются ученые звания, в частности ученое звание профессора, и поэтому «профессор» неравнозначно «лектор».

Сделаем несколько замечаний о практических (семинарских) занятиях, также являющихся очень важным этапом обучения математике. Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, их содержание должно быть хорошо согласовано с лекционным материалом: если студент и на лекциях и на практических занятиях будет знакомиться с одной и той же точкой зрения на изучаемые им понятия, будет закреплять на практических занятиях приобретенные им теоретические знания как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения задач, то он не только хорошо усвоит этот материал и научится применять его на практике, но и получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекций.

Следует подчеркнуть, что только после того, как студенты освоили изучаемый материал с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагался на лекциях), их можно знакомить, и это иногда весьма целесообразно, с другими точками зрения на тот же предмет. Очень вредно, особенно на первых этапах обучения, проведение несогласованных лекций и практических занятий, когда лектор и преподаватель, ведущий семинарские занятия, рассказывают об одних и тех же вопросах с разных точек зрения, основываясь на разных определениях и на разной последовательности изложения отдельных фактов. Это может запутать студентов, нанести тем самым вред их математическому образованию, снизить его эффективность, сделать процесс обучения более трудным для студентов.

Практические занятия по математике — это коллективные занятия. И хотя при овладении математикой большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа (человек не может научиться думать, если он не будет думать сам, а умение думать — основа владения математикой), тем не менее большое значение при изучении математики имеют и коллективные занятия, в частности практические занятия. В этих занятиях принимает участие не более 15—25 студентов из одной группы, достаточно хорошо знакомых между собой и с преподавателем. Этим обусловливаются специфические черты семинарских занятий. Они дают значительный положительный эффект, если на них царит атмосфера доброжелательности и взаимного доверия, если студенты находятся в состоянии духовной раскрепощенности, если они не стесняются ни преподавателя, ни своих однокашников, спрашивают то, что им неясно, открыто делятся с преподавателями и товарищами своими соображениями.

Всего этого очень нелегко достичь, и только вдумчивое самокритичное отношение преподавателя к своей работе, использование своего и чужого опыта позволяют достичь здесь хороших результатов, научиться использовать коллектив индивидуумов с разными способностями и отличиями в подготовке, с разными характерами и темпераментами для активизации работы мысли каждого из них, для творческого овладения изучаемым материалом каждым из них. В качестве примера одного из методов, который приносит успех при изучении даже такой серьезной науки, как математика, отметим привнесение элементов игры в процесс обучения. Эти элементы возбуждают дополнительный интерес, появляются чувства азарта и соревнования, быстрее работает мысль, а в результате приобретаются крепкие знания и умение их применять.

Эффективное использование особенностей человеческой психики в педагогической деятельности очень важно в век необычайно быстрого накопления полезных знаний и дефицита времени. Здесь, безусловно, можно найти дополнительные резервы и безболезненные методы увеличения интенсивности обучения. К сожалению, изучение подобных вопросов применительно к преподаванию математики находится в зачаточном состоянии, особенно по сравнению с разработкой методов интенсивного обучения, основанного на «активизации резервных возможностей личности» в преподавании иностранных языков *). Не умаляя больших заслуг тех, кто разработал и продолжает разрабатывать указанные методы интенсификации изучения иностранных языков и достиг действительно замечательных результатов, все же отметим, что найти подобные методы для серьезного изучения математики, в частности уловить в этом изучении роль подсознательного, научиться

*) Китайгородская Г. А. Интенсивный курс.— М.: Изд-во МГУ, 1979.

влиять на него в нужном направлении, сформулировать теоретические основы интенсификации обучения математике, использующей резервы человеческой психики, и сделать на их основе практические рекомендации, которые можно широко применять,— это очень сложная задача, имеющая свою особую специфику, существенно отличающую ее от аналогичной задачи при обучении другим предметам, особенно тем, в которых основным является механическое неосознанное запоминание. Поэтому в настоящее время применение указанных методов в преподавании математики обусловлено индивидуальным мастерством и талантом преподавателя.

Нельзя не отметить важный воспитательный аспект семинарских занятий. Именно здесь преподаватель имеет большую возможность активно воспитывать в студенте честность, порядочность, уважение к окружающим, любовь к труду. Именно здесь студент может правильно оценить значение помощи друга, когда тот в трудную минуту придет к нему на помощь, роль доверия, которое оказывает ему преподаватель. Именно здесь студент может осознать, как страшно, например, обманув кого-нибудь, потерять доверие окружающих, лишить себя дружеского общения, радости совместного труда и тем самым обеднить свою жизнь. Именно здесь студент может понять, что, потеряв доверие окружающих, его можно вернуть назад, но для этого надо много потрудиться и не словом, а делом, доказать своими поступками свою честность и бескорыстие, принципиальное отношение к людям. Возвращение доверия к человеку должно быть для него одним из самых больших праздников в жизни.

Все это возможно только в том случае, если в студенческой группе царит принципиальное единодушие, над созданием которого надо предварительно серьезно потрудиться педагогу. Но и этого мало. Если преподаватель будет ограничиваться только проведением коллективных занятий, он не сможет проявить себя в нужной мере как воспитатель. Совершенно необходимы индивидуальные беседы, индивидуальные контакты преподавателя со студентами, о них уже говорилось выше в связи с особенностями системы образования в Московском физико-техническом институте. Только в этом случае преподаватель сможет с нужной для успешной воспитательной деятельности степенью познакомиться со своими студентами. Хорошим поводом для таких бесед является обязательная сдача студентами индивидуальных заданий, которые студенты должны не просто представить в выполненном виде, а за работу над которыми они должны отчитаться перед преподавателем, объяснив ему, как и почему они делали именно так, как у них написано. В личных беседах преподавателя и студента могут наиболее полно раскрыться качества педагога-воспитателя: здесь он может дать действительно важный совет, оказать по существу нужную помощь, оказать полезное влияние. Хотя важность всего сказанного не вызывает, конечно, сомнения, но достигаемые здесь успехи находятся обычно совсем не на том уровне, на котором их хотелось бы видеть. Это объясняется, прежде всего, существенной трудностью самого процесса воспитания.

Мы дали уже ряд советов о том, как надо относиться к студентам, как читать лекции и вести семинарские занятия. В дальнейшем будет дан ряд конкретных советов по проведению экзаменов, по организации обучения математике. Возникает вопрос, а как осуществить выполнение всех этих советов в действительности? Да и возможно ли это?

Если согласиться со справедливостью высказанных в этой книге положений, то, по-видимому, основным условием успешного проведения их в жизнь является подбор преподавателей на кафедре. В этом отношении решающая роль принадлежит заведующему кафедрой: он должен прежде всего подобрать таких людей для работы на кафедре, которые являются не только квалифицированными специалистами, но и обладают необходимыми качествами преподавателя, многие из которых были перечислены выше. Если в результате кафедра будет состоять из высококвалифицированных специалистов и хороших педагогов, единомышленников в отношении задач и методов обучения, успех не заставит себя ждать.

После всех данных советов трудно удержаться от еще одного: успеха в преподавании можно достичь не критикой других, равно как обучающихся, так и обучающих (это делают все, в том числе и автор), а критикой самого себя. Не вызывает сомнения, что этот принцип невредно почаще применять и в других областях человеческой деятельности.

4. ОБ ЭКЗАМЕНАХ

> Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память и не понятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно.
>
> *Д. Юнг*

Экзамен является очень важным этапом всего процесса образования и потому заслуживает особого внимания. Часто преподаватели совершенно забывают о том, что если для них экзаменовать студентов является обычной работой, то для каждого студента экзамен — событие в жизни, особенно первый экзамен в институте.

Экзамен, прежде всего, должен быть хорошо подготовлен, в частности, студенты должны быть заранее поставлены в известность, что именно будут их спрашивать на экзамене и где с этим можно познакомиться. Очень плохо, когда студенты тратят драгоценное время, отведенное на подготовку к экзаменам, не только на изучение того, что они должны знать на экзамене, а еще и на поиски книг или каких-либо других материалов, в которых можно найти то, что им требуется.

На экзамене экзаменатору надо не только выяснить, что и как знает студент. Для опытного преподавателя это иногда бывает ясно через две-три минуты после начала ответа студента. Впрочем, случается, что и у опытных преподавателей их первое впечатление на экзамене о студенте бывает ошибочным. Поэтому преподавателю всегда следует помнить, что ему надо быть самокритичным.

Существенно обратить внимание на то, что даже когда преподаватель не ошибся и правильно оценил на экзамене знания студента, этого мало. В результате экзамена и студент должен обязательно четко понять, почему он получил именно ту экзаменационную отметку, которая была ему поставлена за его ответ, а не другую. Важно, чтобы студент в результате экзамена ясно осознал, что если он добросовестно проработал лекции, понял изложенные в них идеи, разобрался в задачах, решавшихся на семинарских занятиях, короче, если он усвоил то, чему его учили, то это существенно облегчило ему подготоку к экзамену и гарантировало успешную его сдачу.

Чтобы правильно провести экзамен, преподаватель, прежде всего, обязан хорошо знать, как именно излагается тот или иной вопрос именно на тех лекциях, которые слушал студент, но, конечно, должен быть готов и к тому, что экзаменующийся будет излагать материал не по лекциям.

К сожалению, нередко преподаватели довольно формально прослушивают ответы студентов по экзаменационному билету, думая в душе: «Ты, батенька, наверное, все списал, пока готовился»,— а затем начинают задавать дополнительные вопросы в виде задач, выставляя в результате на основании ответов на эти дополнительные вопросы экзаменационную оценку. В этом случае у студентов создается впечатление, что им не стоит тратить много времени и сил, чтобы выучить предмет и разобраться в нем при подготовке к экзамену, так как все равно результат экзамена зависит от того, сообразят ли они или нет, как решить задачи, которые им предложат экзаменаторы. А уж если готовиться к экзамену, то целесообразнее всего разузнать, какие вопросы задает тот или иной экзаменатор.

В результате неправильно проведенного экзамена студент будет неправильно ориентирован в смысле направленности его дальнейших занятий в вузе, у него может появиться внутренняя неуверенность в себе и повышенная нервозность.

Конечно, важно выяснить на экзамене, формально или нет владеет студент знаниями по данному предмету, но для этого вовсе не обязательно измышлять какие-то задачи. Можно и элементарными вопросами при ответе по билету выяснить степень понимания студентом материала, знание им связей излагаемого вопроса с другими изучавшимися им понятиями. Ведь именно это характеризует качество знаний студента. И, кроме того, так проведенный экзамен помогает студенту глубже вникнуть в предмет, задуматься над структурой изучаемого курса. А сообразит он или нет, как решить предложенную ему на экзамене задачу, часто ни о чем не говорит. (Безусловно, здесь не имеется в виду случай, когда эта задача имеет алгоритмическое решение, которому его обучали. Нет слов, что такие задачи не только можно, но и должно предлагать на экзамене.) Существует много причин, по которым студент может не сообразить, как решить предложенную ему задачу: он может просто растеряться от экзаменационной обстановки, начать думать в неудачном направлении и, потеряв напрасно время, разволноваться, испугаться и т. д. и т. п. Люди очень разные и думают по-разному, в частности, одни быстро, а другие медленно, одни при недостатке времени сохраняют хладнокровие, другие теряют самообладание.

Сказанное вовсе не означает, что на экзамене не следует задавать дополнительных вопросов, в том числе и задач, отличных от тех, с которыми студент встречался в процессе обучения. Конечно, нет, но эти вопросы и задачи должны быть действительно простыми, с тем чтобы они на самом деле давали возможность выяснить, как студент владеет понятиями, изучавшимися им в данной математической дисциплине. А для этого надо быть особенно внимательным к устным вопросам, которые задаются студенту после его ответа на экзаменационный билет. К сожалению, нередко случается, что эти вопросы и задачи формулируются экзаменатором на основе его собственных вкусов, не всегда даже соответствуют тому, что в действительности изучали студенты, готовясь к экзамену, и, что еще хуже, нечетки по своей форме. В результате всего этого (или даже чего-нибудь одного) подобный вопрос ошарашивает студента, он волнуется, теряет самообладание и бывает не в состоянии ответить даже на те вопросы, на которые он смог бы ответить при других обстоятельствах (такие ситуации случаются на вступительных экзаменах в вуз).

Примером нелепости, которая может произойти в результате нечеткого дополнительного вопроса экзаменатора, является случай, происшедший при сдаче государственных экзаменов в Петербургском университете в 1906 г. Профессор спросил А. Блока, тогда уже известного поэта: «На что делятся стихи?» Блок замялся, не зная, что ответить. Оказалось, что на строфы, как ему укоризненно пояснил профессор.

По-видимому, при устном опросе целесообразно начинать с легких, простых вопросов, ответы на которые (если, конечно, экзаменующийся их знает) помогут ему обрести душевное равновесие и тем самым подготовят его к спокойному размышлению над дальнейшими более трудными вопросами. Очень важно, чтобы содержание и формулировка этих вопросов, независимо от того, являются ли они теоретическими или имеют характер задач, были заранее продуманы, написаны и обсуждены на кафедре. При этом они, безусловно, должны соответствовать тому курсу, который изучали студенты. Запас подобных вопросов должен быть достаточно большим: на материал двухчасовой лекции 15—20 вопросов и задач. Ничего не будет плохого в том, если с ними ознакомить до экзамена студентов. Если найдется студент, который сумеет заранее все их разобрать, он, конечно, заслуживает отличной оценки.

Итак, хорошо, когда на экзаменах проверяются знания студентов, а не их сообразительность, находчивость и скорость мышления, причем не просто знания, а знания того, чему их действительно учили. Это вовсе не означает, что не следует обращать внимания на сообразительность и находчивость студентов, что эти качества не являются важными и нужными. Конечно, нет. Следует не только проверять их, но и уделять большое внимание их развитию. Только проверкой их надо заниматься не на экзамене, а там, где это действительно можно сделать. Например, во время различного рода дополнительных факультативных занятий и, прежде всего, при непосредственном индивидуальном общении преподавателя со студентами. Сообразительность студента, точнее ее направленности (каждый человек обладает сообразительностью в определенном направлении), очень важна при выборе специализации студента, при его дальнейшей работе. Сообразительность означает определенный уровень творческого отношения к изучаемому предмету. Развитию этого качества в процессе обучения (а не на экзамене) следует уделять большое внимание и уделять этому достаточно много времени, поскольку это, как явствует из сказанного, с одной стороны, очень существенно, а с другой — очень и очень непросто. Было бы весьма целесообразно разработать соответствующую методику для различных частей математического курса.

Возвращаясь к проведению экзамена, следует подчеркнуть важность его этической стороны. Человечность, доброжелательность, объективность и внимание экзаменатора к экзаменующемуся являются необходимыми условиями хорошего экзамена. Проявление несправедливости на экзамене, проходящее даже незамеченным для экзаменатора, часто наносит глубокую, долго не заживающую, внутреннюю травму экзаменующемуся.

Один мой коллега, ныне известный математик, как-то рассказал, как он сдавал свой первый экзамен в университете. Поступив в университет после школы, в которой преподавание математики было на недостаточно высоком уровне, он первое время испытывал некоторые трудности, в частности отставал с решением задач по аналитической геометрии на семинарских занятиях. Однако он много работал самостоятельно, изучал не только лекции, которые ему не всегда удавалось хорошо записать, но и читал учебники. На экзамене его экзаменовал преподаватель, ведущий семинарские занятия. Мой знакомый исчерпывающе ответил на все вопросы экзаменационного билета, на все дополнительные вопросы и правильно решил предложенные ему задачи. Тогда экзаменатор подошел к профессору, читавшему лекции, и спросил его, какую отметку он должен ставить студенту: студент-де сейчас отвечает на все вопросы и потому по своим ответам заслуживает отличной оценки, но в течение семестра он не справлялся с предлагавшимися задачами. Профессор спросил, как отвечает студент: по лекциям или по учебникам. «По книгам»,— ответил экзаменатор. «Тогда ставьте ему «хорошо»— сказал профессор. Это была единственная хорошая оценка, которую получил мой коллега за все время обучения в университете — все остальные были отличными. И хотя с тех пор прошло более тридцати лет, до сих пор в душе у него осталось чувство незаслуженной обиды.

Нельзя вообще оправдать настоятельного желания некоторых экзаменаторов слушать от студентов изложение материала только в том виде, в каком они сами излагали его на лекциях. Ведь истинное знание есть нечто инвариантное, не зависящее от метода и манеры чтения лекций тем или иным лектором.

Безусловно, каждый лектор должен быть убежден в том, что он читает лекцию хорошо, даже лучше других. Но это не должно исключать критического отношения к себе, не должно заглушать чувство юмора в отношении собственного совершенства и непогрешимости, не должно приводить к забвению понимания того, что кто-то, в том числе и студент, может думать по-другому, что для него является более доступным, простым, убедительным и понятным другое изложение, с которым он ознакомился по учебникам.

Разница между экзаменатором и экзаменующимся, в частности, состоит в том, что экзаменатор обязан понять уровень знания студента в объеме экзаменационной программы при любом методе изложения материала экзаменующимся, а не только при том, который был избран при чтении лекций. Студенту же достаточно знать только один метод изложения, если только в экзаменационной программе не оговорено специально что-либо другое. Плохо, когда лектор снижает экзаменационные отметки студентам только за то, что они отвечают ему не по его лекциям.

Ничем не оправдано затягивание экзамена некоторыми экзаменаторами, у которых студенты проводят за экзаменационным столом по часу, а иногда и значительно больше. Сами экзаменаторы нередко объясняют такой метод проведения экзамена желанием дать дополнительный шанс студенту улучшить уже заслуженную им по первоначальному ответу оценку или желанием самому научить студента чему-то полезному для него. Несмотря на благородные побуждения такого экзаменатора, его точка зрения базируется на недопонимании роли экзамена в учебном процессе, которая прежде всего состоит, как это отмечалось выше, в проверке знаний студента. На экзамене следует выяснить, как студент знает программный материал, как он им овладел к моменту экзамена, как он продумал его в процессе обучения и подготовки к экзамену, а не как он соображает в течение многочасового неестественного сидения за столом экзаменатора. При знаниях студента на уровне хорошей или отличной оценки для выяснения этого обычно бывает вполне достаточно 10—15 минут. При менее прочных знаниях для их правильной оценки, как правило, требуется больше времени. Но 30 минут всегда бывает вполне достаточно и для оценки ответа, и для убеждения студента в ее объективности, и для выполнения дополнительной учебной функции экзамена.

Затягивание экзамена вредно и с воспитательной точки зрения: у студента опять-таки создается впечатление, что самое главное не знать, а сообразить на экзамене, поэтому стоит ли заранее тренироваться, решать какие-то задачи, разбирать теоремы. Уж лучше посидеть на экзамене часа два, за это время уж что-нибудь сообразишь!

Само собой разумеется, что все сделанные рекомендации имеют смысл только при правильной методике проведения экзаменов. В частности, методика проведения экзаменов по математике должна учитывать специфичность математических дисциплин, состоящую в том, что в них всегда имеются принципиальные, как правило, трудно преодолимые узловые вопросы. При различных методах изложения имеющиеся трудности могут перемещаться из одного места в другое. Поэтому может оказаться, что некоторый вопрос при одном методе излагается довольно сложно, так как именно в этом месте преодолевается одна из упомянутых выше принципиальных трудностей, а при другом методе тот же вопрос излагается просто, поскольку трудность перенесена в другое место. Будет очень плохо, если студент «изучит» отдельные части пройденного курса по различным источникам, выбирая каждый раз те из них, в которых эти части излагаются проще, но не усвоит внутренней логики изучаемого предмета и, более того, не разберется ни в основных идеях, лежащих в его основе, ни в методах преодоления принципиальных трудностей, ни в важности и полезности полученных в итоге результатов.

Поэтому если студент отвечает на экзамене, используя разные источники, то экзаменатор обязан разобраться, понимает экзаменующийся внутреннюю логическую связь между разными частями курса и владеет ли он основными идеями курса в целом. В противном случае экзамен будет служить лишь поощрением верхоглядству и ловкачеству, вред чего трудно переоценить.

Рассказанный случай, происшедший на экзамене, является еще и примером того, как преподаватель не смог преодолеть своего ошибочного представления о студенте, которое сложилось у него в течение семестра. Можно пытаться исключить подобные ситуации разными способами. Конечно, самым главным является развитие самокритичности у самих экзаменаторов. Однако иногда помогают и организационные меры.

Так, например, в Московском физико-техническом институте на кафедре высшей математики сложилась (именно сложилась, а не была введена в приказном порядке) по инициативе самих преподавателей система, при которой преподаватель, ведущий семинарские занятия в группе, не экзаменует студентов этой группы, а экзаменует только студентов других групп. Это не только исключает возможность влияния заранее сформировавшегося ошибочного мнения экзаменатора, но и позволяет сравнить преподавателю свое мнение о знаниях студента с оценкой, поставленной ему на экзамене беспристрастным экзаменатором (надо надеяться, что он действительно был таким). Последнему, конечно, не возбраняется во время экзамена в случае, если он считает это нужным, проконсультироваться с преподавателем, ведшим в течение семестра семинарские занятия у экзаменующегося студента (этот преподаватель обязан присутствовать на экзамене). Иногда преподаватели всех групп выставляют перед экзаменом предварительные оценки своим студентам, но, конечно, только для внутреннего использования на кафедре. При анализе работы преподаватели сравнивают эти оценки с оценками, полученными студентами на экзаменах.

Другой случай на экзамене произошел еще более давно, в тридцатые годы, с другим моим знакомым. В то время существовало правило, согласно которому студенту, правильно ответившему на все вопросы экзаменационного билета и на дополнительные вопросы по программе, можно было поставить только хорошую оценку. Для получения же отличной оценки студенту необходимо было правильно ответить еще на внепрограммный вопрос. Конечно, это правило само по себе нелепо, нельзя найти какие-либо разумные доводы для его оправдания. Но так было. На одном экзамене мой знакомый заслужил своим ответом хорошую оценку, и был спрошен, хочет ли он продолжать экзаменоваться, с тем чтобы попытаться получить отличную оценку. Он дал согласие, получил дополнительный вопрос, стал думать и через 40 минут дал правильный ответ. Однако профессор поставил ему лишь хорошую оценку, сказав, что мой знакомый думал слишком долго, тогда как, по его мнению, для получения ответа было достаточно 15 минут.

Мне кажется, что два описанных здесь случая являются примерами того, как не надо проводить экзамен. Ведь нельзя не учитывать нервного состояния студента во время экзамена, необычную для него обстановку, различную на нее реакцию у разных студентов. Встречается немало студентов, которые, готовясь к ответу у доски (а именно так и проходил экзамен во втором из приведенных выше случаев), теряются и чувствуют себя гораздо менее уверенными и спокойными, чем когда они готовятся к ответу сидя за столом. То же самое относится и к самому экзамену. Нельзя на экзаменах подходить ко всем студентам с одинаковыми мерками, в частности, относительно скорости, с которой студент должен давать ответы на предлагаемые ему вопросы — природа человека слишком разнообразна и сложна. Только содержание ответа экзаменующегося студента является основанием для оценки его знаний на экзамене.

Конечно, и здесь, как и всегда в жизни, нельзя этот принцип доводить до абсурда. Если, например, студент после изучения математического анализа на просьбу дать определение производной будет думать полчаса, после чего даст правильный ответ, то это, безусловно, будет свидетельствовать о непрочности и недостаточности его знаний. Впрочем, это практически нереальный случай. Само собой разумеется, что в приведенном выше примере речь шла о достаточно трудном дополнительном вопросе.

Попутно специально заметим, что если студент во время экзамена не отвечает на какой-либо вопрос или не решает задачу, то это вовсе не означает, что он не заслуживает отличной оценки и что ему объективно нельзя ее поставить. Экзаменатор имеет возможность выяснить (и ему следует это сделать), случаен или нет неправильный ответ экзаменующегося и каковы его действительные знания. Вполне может оказаться, что, несмотря на осечку, студенту можно и нужно поставить «отлично» за экзамен.

Отметим еще недопустимость, к сожалению, достаточно широко распространенного обычая просматривать перед выставлением отметки студенту за экзамен его предыдущие экзаменационные оценки. В этом случае преподаватель сознательно или подсознательно руководствуется при выставлении своей экзаменационной оценки предшествующими. У некоторых преподавателей существует даже мнение, что оценка, полученная студентом на предыдущем экзамене по данному предмету или близкому к нему, обязательно должна приниматься во внимание при выставлении ему оценки по этому предмету на очередном экзамене: например, после оценки «удовлетворительно» нельзя ставить оценку выше «хорошо». Это, безусловно, неправильно.

Если экзаменатор, просмотрев зачетную книжку студента и убедившись, что он неважно успевал, поставит ему «удовлетворительно» или «хорошо» с убеждением, что на его оценку не повлияли предшествующие оценки экзаменующегося (они, возможно, на самом деле не повлияли), то студент, скорее всего, все равно будет думать, что полученная им оценка была снижена из-за его плохой успеваемости в предыдущих семестрах. В результате у него возникает ощущение, что безнадежно пытаться добиться более высоких оценок, а преподаватель в его глазах теряет свой авторитет, так как, по мнению студента, преподаватель не смог вынести самостоятельного мнения об его знаниях и сам решить, какой оценки заслуживает его ответ.

Само собой разумеется, что после выставления экзаменационной отметки не возбраняется просмотреть зачетную книжку студента — такой знак внимания и интерес к своей особе студент, безусловно, оценит правильно.

Впрочем, в жизни, в отличие от математики, всякое категорическое высказывание оказывается, как правило, неверным. Конечно, есть ситуации, когда ознакомление с предшествующими оценками студента не только допустимо, но желательно и, более того, просто необходимо. Например, это обязательно надо делать при проведении государственных экзаменов и защите дипломных работ. В этом случае экзаменаторам следует не просто принять к сведению информацию об успеваемости студента за время его обучения в институте или университете, а иногда в силу этой информации изменить стандартную процедуру экзамена.

Поясним сказанное на примере. Случается, что студент, получавший за пять-шесть лет обучения в высшем учебном заведении только хорошие и отличные оценки, а иногда и только отличные, получает на государственном экзамене удовлетворительную, а то и неудовлетворительную оценку. Стоит ли этому удивляться? Какие только маловероятные вещи не происходят на свете! Все-таки стоит и не только удивляться, но и задуматься над этим случаем.

При самом высоком уровне квалификации экзаменаторов и при самой высокой степени их добросовестности и объективности, если они поставили указанные выше оценки, вероятность того, что они ошиблись в оценке знаний студента, значительно выше, чем ошибка тех 50—60 преподавателей, которые высоко оценивали знания студента в течение всего времени его обучения в вузе.

Но как же надо поступать, если хорошо успевавший в прошлом студент на самом деле отвечает на государственном экзамене лишь на удовлетворительную, или того хуже, неудовлетворительную оценку? Нельзя же просто ставить ему повышеную оценку за его прошлые заслуги? Конечно, нельзя. Но и ставить сразу низкую оценку тоже нельзя.

Студент, хорошо проучившийся много лет, т. е. систематически и добросовестно проделавший большую трудную работу, заслуживает неформального и внимательного к себе отношения. Нельзя по результатам получасового разговора перечеркнуть многолетний труд студента. Много может быть случайных причин его неудачного ответа, связанных с его характером, внутренними переживаниями, событиями в его жизни, смущением, растерянностью, с необычной, а иногда и нервозной обстановкой на экзамене и даже с психологической несовместимостью экзаменаторов и экзаменующихся. Душевная травма, наносимая студенту в результате несправедливости, допущенной на государственном экзамене, усугубляется тем, что эта несправедливость является завершающим аккордом замечательного периода в жизни человека, когда он был студентом.

Но как же все-таки поступать в подобных случаях? По-видимому, следует внести определенные изменения в традиционную процедуру проведения государственных экзаменов или соответственно защиту дипломных работ: экзаменаторы, экзаменовавшие студента, не должны, уповая на свою непогрешимость, настаивать на оценке, которую они считают нужным ему поставить на основании проведенного экзамена, а сами (чтобы не было никаких обид) должны попросить, чтобы этого студента проэкзаменовала комиссия в другом составе. Этот повторный экзамен, конечно, целесообразно провести некоторое время спустя и лучше не в тот же день. Таким образом, выставление на государственном экзамене или при защите дипломных работ оценок, противоречащих всей предыдущей работе студента, требует по крайней мере двукратной проверки знаний студента комиссиями разного состава.

Возникает, правда, вопрос, а целесообразно ли вообще проводить государственные экзамены по специальности? Ведь вряд ли возможно за 30—40 минут, даже при наличии всей необходимой добросовестности и доброжелательности, оценить знания студентов более объективно, чем это уже было сделано за все время обучения их в вузе. Это, безусловно, так, однако проведение государственных экзаменов оправдывается той большой пользой, которую получают студенты во время подготовки к этим экзаменам, когда они вынуждены посмотреть не на отдельные изолированные части своей будущей специальности, а продумать и осознать ее в целом. По крайней мере один раз в жизни сделать это, безусловно, целесообразно.

Впрочем, полезно напомнить, что существует и другая метода проведения государственных экзаменов. Так, в Московском физико-техническом институте на государственных экзаменах по физике студенты получают экзаменационный вопрос за полтора месяца до экзамена. Во время подготовки к этому экзамену студент, изучая дополнительную литературу, углубляет свои знания и учится самостоятельно работать над поставленным перед ним вопросом. Само собой разумеется, что во время экзамена перед экзаменующимся неизбежно ставятся и вопросы, связанные с различными разделами изучавшегося им курса физики. Такая система проведения государственных экзаменов имеет свои преимущества.

Мы рассмотрели роль и значение экзамена в учебном процессе. Из всего сказанного явствует, что экзамен действительно является важным средством воспитания и, в частности, учит распознавать добро и зло. Правильно проведенный экзамен укрепляет веру человека в торжество справедливости, в объективность оценки его деятельности, а неправильно — наоборот, подрывает веру в справедливость и объективность и тем самым подрывает моральные устои.

Правильно проведенный экзамен, успешно сданный студентом, приносит ему большое чувство удовлетворения, ощущение важности и нужности проделанной им работы, сознание того, что его труд был правильно оценен. Это мобилизует его силы и энергию на преодоление дальнейших трудностей, создает у него объективную уверенность в своих силах. Очень хорошо, когда студент на экзамене ощущает, что и для преподавателя, который его экзаменует, экзамен является неформальной проверкой его знаний, что преподаватель сознает существенность момента.

Мне очень понравился традиционный обычай, существующий в Таллинском политехническом институте, где после первого сданного студентом экзамена экзаменатор встает, поздравляет студента и обменивается с ним рукопожатием — прекрасный пример для подражания!

Итак, следует понимать и всегда помнить, что экзамен является не только проверкой знаний, приобретенных студентом во время его обучения, и проверкой умения их использовать, но экзамен является важным звеном во всей цепи обучения студента, составляя существенную часть учебного и воспитательного процесса. Преподаватель может многому научить студента во время экзамена, если он не будет ставить своей единственной целью выяснение того, что студент не знает, а, наоборот, будет стараться найти и выяснить, что он знает, на каком уровне владеет своими знаниями. В последнем случае преподаватель при тактичном проведении экзамена может помочь студенту осознать имеющиеся у него пробелы в его знаниях (если они, конечно, существуют) и тем самым помочь ему лучше организовать свою работу при дальнейшем обучении.

Студент должен, как правило, после экзамена чувствовать, что он не только рассказал преподавателю о том, что он учил, над чем думал, но что он и сам во время экзамена чему-то научился, узнал что-то существенно новое и полезное для себя.

Следует еще отметить, что в отдельных сложных случаях во время экзамена необходим индивидуальный подход к студенту, учитывающий специфические черты его характера и темперамента. Та или иная манера проведения устного экзамена, хорошая для одного студента, может оказаться очень плохой для другого и тем самым не будет объективно отвечать вышеуказанным целям экзамена.

Все сказанное выше относилось к устным экзаменам. Нельзя не сказать несколько слов о письменных экзаменах. Проведение письменных экзаменов весьма целесообразно по ряду причин. В частности, письменные экзамены имеют более объективный характер, поскольку всем экзаменующимся предлагаются более или менее однотипные вопросы, на написанные ими ответы не влияет личность экзаменатора, на оценке этих ответов не сказывается внешнее впечатление, производимое экзаменующимся на экзаменатора, и т. д. и т. п.

Можно соединить оба способа проведения экзаменов: письменный и устный. Это позволяет добавить к перечисленным положительным сторонам письменного экзамена достоинства устного, проистекающие от непосредственного общения экзаменатора и экзаменующегося. Именно такая система экзаменов и принята в Московском физико-техническом институте с момента его создания. Экзамены почти по всем математическим дисциплинам состоят в нем из двух частей: письменной и устной. Письменный четырехчасовой экзамен проводится одновременно для всех студентов данного курса за два-три дня до устного (было бы еще более целесообразно проводить его накануне устного экзамена, как это делалось в первые годы существования Физтеха, однако в этом случае возникают большие затруднения со своевременной проверкой экзаменационных работ). На этом экзамене студентам предлагается набор из 8—10 задач, каждая из которых оценена в определенное количество очков. Имеется четкая инструкция для оценки проверяющими решений задач: за что следует снимать, а за что набавлять очки и в каком количестве. Для того чтобы быть допущенным ко второй части экзамена, т. е. к устному экзамену, студент должен набрать определенный минимум очков.

Например, если общее суммарное число очков, в которое оценены все задачи данного варианта, составляет 40 очков, то студенту для допуска ко второй части экзамена надо иметь по письменной экзаменационной работе более 10 очков. Если у него их меньше, то после беседы с преподавателем по поводу его работы, в ходе которой студент убеждается, что большего количества очков его письменная работа не заслуживает, ему выставляется неудовлетворительная оценка.

В случае, когда студент набрал более 10 очков, он получает экзаменационный билет и экзамен продолжается. При этом экзаменатор имеет в своем распоряжении проверенную экзаменационную работу и руководствуется степенью ее выполнения при выставлении экзаменационной отметки. Если у студента набрано 11—20 очков, он может получить не выше оценки «удовлетворительно», если 21—30 очков — не выше «хорошо», и только имея не менее 31 очка, он может претендовать на отличную оценку. В процессе устного экзамена студент знакомится с результатом проверки его письменной экзаменационной работы и экзаменатор разъясняет ему, в случае необходимости, в чем состоят допущенные им ошибки.

Наличие письменного экзамена, который целесообразно проводить на данном курсе одновременно для всех факультетов, имеющих одинаковую программу по математике, влечет за собой необходимость одновременного проведения устного экзамена для всех студентов, прошедших через письменный экзамен. Это приводит к тому, что для лектора, читающего курс для большой аудитории, оказывается возможным проэкзаменовать лишь малую долю своих слушателей. Это, конечно, существенный недостаток, который, однако, неизбежен в какой-то степени, если стремиться к тому, чтобы студенты были в одинаковом положении как в отношении информации о содержании письменного экзамена, так и в отношении времени на подготовку к устному экзамену.

Многолетний опыт Московского физико-технического института показывает целесообразность и разумность такой системы экзаменов.

5. О СУЩНОСТИ МАТЕМАТИКИ

> Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.
>
> *Леонардо да Винчи*

Вопрос о том, чему и как учить в математике, вновь остро обсуждается в настоящее время в связи с повышением роли математических методов как при решении конкретных практически важных задач, так и при проведении самых разнообразных теоретических исследований. Вот как оценивает роль математики уже упоминавшаяся XIX Международная конференция по народному образованию: «...математика имела во все времена бесспорное культурное и практическое значение, играла важную роль в научном, техническом и экономическом развитии, «...наша эпоха создает невиданные ранее условия расцвета математики...»*).

Математизация — это характерная черта современной науки и техники. Человечество ныне как никогда осознало, что знание, уж во всяком случае в области естественных наук, делается точным только тогда, когда для его описания удается использовать математическую модель (уже известную, либо специально созданную).

В настоящее время в результате появления быстродействующих вычислительных машин появились качественно новые возможности использования математических методов. Они применяются ныне не только там, где это делалось издавна (например, в механике, в физике), но и там, где двадцать — тридцать лет назад об этом не было и речи (в экономике, геологии, социологии, лингвистике, биологии, медицине, управлении и т. п.).

Стало возможным проводить вычисления в таком объеме (например, решать 100 000 уравнений, что не редкость при изучении экономических моделей) и с какой скоростью (десятки миллионов операций в секунду), о которых вряд ли даже мечтали предшествующие поколения. При изучении разнообразных проблем математическими методами стало возможным использовать такое количество информации (в частности, статистической), накапливаемой в современной вычислительной машине, которую человеческий мозг просто не в силах охватить. Поэтому использование ЭВМ позволило не просто убыстрить работу одного человека, не просто заменить работу большой группы людей, а дало возможность проводить исследования принципиально нового типа, которые ранее были не по силам даже большому специально собранному коллективу высококвалифицированных специалистов, хотя бы из-за невозможности для них обменяться всей нужной информацией и усвоить ее, с тем чтобы использовать ее в своей работе.

Впрочем, было бы, конечно, заблуждением думать, что современная вычислительная техника дает возможность численно решить каждую задачу, возникающую на практике. Это не так. Возникают практические

---

*) Математическое просвещение. Вып. 1.— М.: Гостехиздат, 1957, с. 15—22.

задачи, умение справиться с которыми принесло бы людям ощутимую пользу, но, к сожалению, для их численного решения мощности современных ЭВМ далеко не достаточно, и пока можно лишь мечтать о том времени, когда появятся такие компьютеры, что с их помощью люди смогут решать все нужные им задачи.

Огромную роль, которую играет вычислительная техника в экономике современного развитого государства, образно выразил еще более двадцати лет тому назад американский президент Дж. Кеннеди, сказав, что если бы в то время в Америке остановились все вычислительные машины, то это была бы столь большая катастрофа, что ничего подобного ей его страна никогда прежде не переживала.

Заметим, что с появлением новых возможностей использования математики, связанных с современной вычислительной техникой, не потеряли своего значения и методы классической математики, в частности качественные математические исследования. С помощью подобных методов производится, например, правильная постановка математических задач, создание новых математических моделей, отбор материала для просчитывания его на вычислительных машинах и разработка новых вычислительных методов.

Вместе с увеличением объема приложений математики продолжает интенсивно развиваться и она сама, причем ее развитие, как и всегда, стимулируется не только внешними, но и внутренними факторами.

Внешние стимулы могут влиять на развитие математики по-разному. С одной стороны, это может быть связано с изучением реальных явлений математическими методами. Например, изучение задач механики, законов движения материальных тел, вычисление площадей и объемов привело к созданию дифференциального и интегрального исчислений. С другой стороны, случается, что наблюдение какого-либо явления приводит к постановкам чисто математической задачи, которая исследуется сама по себе, уже без связи с самим явлением. Так, древние греки, заметив, что высоты звучания струн зависят от их длины, стали заниматься изучением отношений чисел и назвали эту часть математики музыкой.

Математика «имеет свою внутреннюю логику развития, следуя которой математики создают понятия и даже целые разделы, являющиеся продуктом чисто умственной деятельности, которые никак не связаны с окружающей нас материальной действительностью и не имеют в настоящее время никаких приложений...

Невозможно, однако, утверждать, что обладающие внутренней стройностью, но лишенные приложений, разделы математики не имеют права на существование. Они составляют внутреннюю ткань науки, иссечение которой могло бы привести к нарушению всего организма в целом. Кроме того, оказывается, что некоторые разделы математики, лишенные приложений в течение многих веков, позже находят эти приложения»*).

Убедительным примером содержательности внутреннего развития математики и пользы от этого не только для нее самой, но и для ее приложений, является создание древнегреческими математиками теории конических сечений, которая не находила своего применения «две тысячи лет, пока Кеплер не воспользовался ею для создания точной теории движения небесных тел, а от этой теории Ньютон затем создал механику, служащую основой всей физики и техники»**).

Другим подобным примером может служить теория групп, зародившаяся в конце XVIII века в недрах самой математики (в 1771 г. Ж. Лагранж рассмотрел группы подстановок в связи с изучением алгебраических уравнений, разрешимых в радикалах) и нашедшая лишь в конце XIX века свое плодотворное применение в кристаллографии, а позднее в теоретической физике.

Нельзя не отметить внутреннее возникновение в математике «воображаемой геометрии» Н. И. Лобачевского, которая сыграла очень важную роль как в развитии самой математики, так и в эволюции наших гносеологических представлений об окружающем нас мире.

Еще более современным является пример практического использования томографии. В 1917 году И. Радон, работая в области интегральной геометрии и, по-видимому, нисколько не думая о каких-либо практических приложениях своих исследований, решил задачу о восстановлении множества в пространстве по бес-

---

*) Понтрягин Л. С. Оптимизация и дифференциальные игры.— Успехи математических наук, 1978, 33, 6, с. 22—28.

**) Крылов А. Н. Воспоминания и очерки.— М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 589.

конечному набору его проекций. Метод, которым он осуществил это восстановление, впоследствии стал в честь него называться преобразованием Радона. Лишь в 1956 году оно нашло свое первое применение. Р. Брейсуэлл, успешно применив преобразование Радона в радиоастрономии, получил картину сверхвысокочастотного излучения поверхности Солнца. Но безусловно самым замечательным достижением, полученным с помощью преобразования Радона, на сегодняшний день является создание Г. Хаунсфилдом и А. Кормаком компьютерной томографии, за которую им в 1979 году была присуждена Нобелевская премия. (С помощью компьютерной томографии можно в считанные секунды получить изображение сечения человеческого тела в любом нужном месте.)

Вопрос о роли, значении и содержании математики в последнее время стал привлекать большое внимание. Высказывалось много критических замечаний в адрес современной математики и математиков. Это видно даже из заголовков появляющихся в печати статей: «Можно ли спасти математику»*), «Физики против математиков?»**), «Математики сами за себя»***) и т. п. Встречаются высказывания, в которых сквозит явное разочарование в возможностях достижения существенных успехов в решении многих жизненно важных задач с помощью математических методов, где это еще совсем недавно казалось близким и возможным.

Это связано с тем, что первое использование быстродействующих вычислительных машин для решения конкретных задач, например, инженерно-технических или задач управления и планирования производством, оказалось сплошь и рядом весьма успешным и привело к широкому распространению мнения об универсальности и могуществе математических методов, о том, что нужно лишь применить соответствующим образом математику в экономике, биологии или какой-либо дру-

---

*) Спон У. Дж. (мл.). Можно ли спасти математику.— Природа, АН СССР, 1973, № 2, с. 50—53.

См. там же:

Дородницын А. А. Что нужно спасать?

Новиков С. П. Необходима перестройка математического образования.

**) Письмен Л. Физики против математиков? — Знание — сила, 1972, 2, с. 30—31.

***) Шрейдер Ю. Математики сами за себя.— Знание — сила, 1972, 2, с. 32—33.

гой науке, как в них автоматически произойдет большой прогресс. К чести самих математиков, следует заметить, что они сами мало причастны к созданию этого мнения, которое, конечно, весьма наивно.

Дальнейшие события показали, что без развития экспериментальных и теоретических исследований в какой-либо науке (например, той же экономике или биологии) невозможно существенное продвижение вперед за счет применения только математических методов. Для построения содержательной математической модели в экономике или биологии необходимо знание экономических, соответственно биологических законов, нужны, прежде всего, содержательные экономические или биологические гипотезы.

Положение математики в настоящее время можно сравнить с успешной деятельностью некоторой фирмы, в результате которой фактическая цена ее акций непрерывно растет (роль и значение математики действительно непрерывно и, по существу, все время увеличивается). Вследствие роста стоимости акций на них естественно повышается спрос, что в свою очередь приводит к некоторому повышению их рыночной цены, которая тем самым оказывается превышающей истинную стоимость. Нечто подобное произошло и с математикой: в связи с колоссальными успехами, достигнутыми в результате использования быстродействующих вычислительных машин при решении актуальных научных и хозяйственных проблем, не вполне компетентные специалисты создали некоторый бум вокруг математики, что привело к определенной ее фетишизации. Сказались эти успехи и на положении математиков, которые стали играть в обществе более значительную роль (естественно, за счет утраты определенных позиций их коллегами из других областей науки, что не могло не вызвать известного раздражения у части из них).

Когда все стало на свои места, и достаточно четко обрисовались реальные контуры использования математических методов и выявились ошибки, допущенные при подготовке кадров, необходимых для правильного применения современной вычислительной техники, у некоторых людей появился определенный скепсис (а у некоторых он существовал всегда) в отношении математики, возродив снова разговоры о том, что математика-де не наука, а язык (высказывание, восходящее к известному физику Гиббсу), что математика — это жернова, которые сами по себе ничего не производят, а только мелют то, что в них засыпают (Гексли) и т. д. и т. п. Все это не ново, как говорит Гарднер: «Никогда не было недостатка в хулителях математики».

Справедливости ради следует заметить, что высказывания подобного рода делаются не только извне в адрес математики в целом, но и «внутри» самой математики, если так можно выразиться. Например, от математиков, занимающихся «классическими вопросами», нередко можно услышать, что функциональный анализ не наука, а язык, а от математиков, решающих задачи на ЭВМ, что классическая математика является схоластикой. Это все высказывания одного порядка.

Что бы ни говорили отдельные скептики, роль и значение математики в настоящее время продолжает увеличиваться и соответственно продолжает расти число людей, занимающихся математикой. Например, в США *), по статистическим данным на 1963 г., имелось 42,1 тысячи математиков. Согласно же Бюро статистики труда США их число к 1975 г. должно было увеличиться до 87,2 тысячи человек, т. е. на 107,8%, что больше чем прогнозируемый прирост к тому же году инженеров, химиков, физиков, биологов и других ученых-естественников, т. е. научных работников в области наук о земле, ученых-металлургов и т. д.

В Канаде на будущее даются такие рекомендации **): «На разных ступенях нашего общества, в том числе в университетах, в сфере бизнеса, в промышленности, в соответствующих департаментах федерального правительства и местных органах власти, необходимо приложить определенные усилия, направленные на более эффективное развитие математики и подготовку специалистов, владеющих математикой».

Во Франции положение описывается следующим образом ***): «Признано также, что до сих пор слишком мало внимания уделялось условиям труда мате-

---

*) Политика США в области науки.— М.: Прогресс, 1971.

**) Coleman A. J., Edwards G. D., Beltsner K. P. Mathematical sciences in Canada.— Science Council of Canada, 1975, 38, p. 181.

***) Илечко Б. Научные исследования во Франции.— М.: Мир, 1971, с. 104.

матиков. Пятый пятилетний план обеспечил им помощь в лице научных секретарей, технических помощников и специализированных переводчиков. Предусмотрены также ассигнования на приобретение литературы и значительное облегчение с изданием трудов по математике. Математики располагают крупными суммами на поездку за границу и на приглашение во Францию крупных иностранных специалистов». Далее там же пишется: «В настоящее время намечается поворот к новым сферам применения математических методов, а именно праксеологии, которая становится наукой, приобретающей фундаментальное значение, и в подготовке крупных социальных решений, определяющих будущность человечества: планирование, планировка застройки районов, пути сообщения, модернизация сельскохозяйственных предприятий, политика развития слаборазвитых стран и т. п.».

Подобная ситуация типична для всех развитых стран.

Так что же такое, прежде всего, математика?

В настоящее время под математикой обычно понимается объединение чистой и прикладной математики. Чистая математика (ее иногда называют теоретической математикой) — это наука, изучающая специальные логические структуры, называемые математическими структурами, у которых описаны определенные отношения между их элементами. Мы не будем пытаться дать определение того, что является математической структурой. Формулировка такого определения с общей точки зрения потребовала бы углубления в тонкости философии, а конкретное определение, т. е. описание всевозможных математических структур, заняло бы слишком много места — и то и другое увело бы нас далеко в сторону от основной цели этой книги. Поэтому отметим лишь, что некоторые из математических структур могут являться непосредственными моделями реальных явлений, другие — связаны с реальными явлениями лишь посредством цепи понятий и логических структур. Эта цепь может состоять из многих звеньев. Математические структуры второго типа являются продуктом внутреннего развития математики.

Чистая математика представляет собой стройную и глубокую совокупность знаний о математических структурах со своими проблемами, с собственными путями развития, обусловленными внутренними и внешними причинами и задачами. Прикладная же математика является наукой, в которой математическими методами изучаются реальные объекты. Она состоит из математического моделирования, качественного и количественного исследования математических моделей, теории алгоритмов численных решений возникающих при этом задач, математического обеспечения ЭВМ, необходимого для проведения вычислений по указанным алгоритмам.

Коротко говоря, как чистая, так и прикладная математика изучает математические структуры, только в чистой математике они изучаются сами по себе, а в прикладной они, во-первых, являются моделями реальных явлений, а во-вторых, целью изучения математических структур в этом случае является изучение реальных явлений, которые они моделируют.

Существуют и другие определения того, что такое математика. Иногда математикой называют лишь чистую математику, иногда лишь ту часть чистой и прикладной математики, которая может быть получена так называемыми конструктивными методами, а иногда всей математике приписывают изучение реального мира, реальных объектов. Происходят даже дискуссии по поводу того, что же представляет из себя математика. Возникающие здесь разногласия обычно носят несколько схоластический характер: спорить о том, какое определение математики правильно, не имеет смысла — всякое корректное определение правильно, поэтому с определением не спорят. Если мы, например, назвали математическое моделирование частью математики, то оспаривать это бессмысленно, что названо математикой, то и названо. Одному может нравиться одно, а другому другое определение. Здесь часто бывает невозможно переубедить человека, хотя было бы, безусловно, очень удобным, если бы удалось договориться о едином определении понятия математики. Но важно заметить, что независимо от того, что названо математикой, существуют математические структуры, математическое моделирование, машинные языки, изучение реального мира с помощью математических моделей и решение практически важных задач математическими методами, и принципиальным является **понимание связей, которые существуют между изучением математиче-**

ских структур самих по себе и изучением реальных материальных объектов или реально протекающих процессов математическими методами, т. е. связей между чистой и прикладной математикой, понимание того, какие факторы определяют их развитие, в частности, как влияет каждая из них на развитие другой. Здесь имеются разные точки зрения, и здесь есть повод для дискуссий. Одни считают, что математические структуры живут и развиваются сами по себе в процессе мышления человека, другие — что они возникают только при математическом моделировании реальных объектов. Это две крайние точки зрения — истина лежит где-то посередине. Мы уже выше коснулись нескольких этих вопросов и вернемся к их анализу во второй части книги. А теперь рассмотрим роль математики в человеческой культуре, ее значение для познания мира.

Математика представляет интерес, прежде всего, сама по себе, как совокупность объективных истин. Кроме того, математика дает удобные и плодотворные способы описания самых разнообразных явлений реального мира и тем самым действительно выполняет в этом смысле функцию языка. Эту роль математики прекрасно осознавал еще Галилей, сказавший: «Философия написана в грандиозной книге — Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики...»*).

Замечательно, что еще Леонардо да Винчи понимал значение и роль математики при изучении природы. Он писал: «Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одну из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой»**).

Наконец, и это очень важно, математика дает людям мощные методы изучения и познания окружающего их мира, методы исследования как теоретических, так и чисто практических проблем. С помощью мате-

*) The Assayer, Discoveries and opinions of Galileo. New York: Doubleday Anchor Books, 1957, p. 237—238.

**) Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.

матики *) решается много важных и актуальных технических и экономических задач, имеющих первостепенное значение для хозяйства страны, что превратило математику в производительную силу общества.

Поэтому развитие математики имеет большое первостепенное значение для прогресса науки и техники. Вот что пишут в связи с этим Ю. П. Попов и А. А. Самарский: «Огромной ценностью обладает труд математиков, которые выводят все новые теоремы из аксиом, обогащая сокровищницу точного знания, где языком математики описан господствующий в природе порядок вещей»**).

Эти три звена математики (математические структуры, язык описания и метод изучения реального мира) тесно связаны между собой и развиваются как за счет взаимодействия друг с другом, так и за счет внутренних факторов, причем отдельные и даже далеко идущие этапы развития могут происходить изолированно. Именно это обстоятельство иногда влечет за собой одностороннее восприятие сущности математики, сведение ее к одной из перечисленных ее ипостасей и тем самым пренебрежение всем многообразием относящихся к этому вопросу фактов.

Близкую к сказанному выше точку зрения на математику сформулировал А. Пуанкаре: «Математика преследует тройкую цель. Она должна давать орудие для изучения природы. Но это не все: она преследует цель философскую, и — я решаюсь сказать — эстетическую»***).

Итак, резюмируя, можно сказать, что математика — это область человеческого знания, в которой изучаются математические структуры. Математический язык является удобным языком для описания реальных явлений, а математические методы — плодотворными методами их изучения.

Оставляя в стороне философские и лингвистические обоснования, область человеческого знания, именуемую

---

*) Популярное, интересно написанное и вместе с тем глубокое освещение вопросов, связанных с сущностью математики, читатель может найти в брошюре А. Реньи «Диалоги о математике» и в предисловии к ее русскому изданию (М.: Мир, 1969), написанному Б. В. Гнеденко.

**) Попов Ю. П., Самарский А. А. Вычислительный эксперимент.— М.: Знание, 1983, с. 60.

***) Пуанкаре А. О науке.— М.: Наука, 1983, с. 219.

математикой, будем называть все-таки наукой, а не языком, независимо от того, понимать ли под языком только язык описания или и язык логического вывода. Мы не будем заниматься философским содержанием и углубляться в сущность понятий «математическая структура» и «математика». Это глубокие философские вопросы, и рассмотрение их не входит в нашу задачу. Если кто-то все-таки продолжает считать математику языком, тот может каждый раз, когда будет говориться о математике как о науке, говорить про себя: язык, язык, язык. От этого ровно ничего не изменится в понимании нижеследующего, это нисколько не повлияет на смысл всего дальнейшего.

Возвращаясь к месту и роли математики в жизни и деятельности человечества, начнем снова с цитирования А. Пуанкаре. Он писал: «...математика заслуживает развития сама по себе и ... теории, которые не могут быть применимы в физике, должны развиваться так же, как и другие. Если бы даже цели физики и цели эстетики не совпадали между собой, мы не должны были бы приносить в жертву ни тех, ни других. Более того, эти два рода целей неразделимы, и лучшее средство достигнуть одних — это преследовать другие или, по крайней мере, никогда не упускать их из виду» *). Это было написано в начале XX века. Положение не изменилось и к настоящему времени. Вот это написано в обзоре «Математические науки в Канаде»**). «В двадцатом столетии центральное ядро математических наук, традиционно называемое чистой математикой, развивается очень быстро. Те, кто сегодня обращаются к изучению чистой математики, сталкиваются с удивительными математическими структурами, о которых столетие назад невозможно было и мечтать. Исследования, проводимые чистыми математиками, нередко находятся далеко от практического их использования и представляют собой красивые и изящные абстрактные математические системы. Они являются развивающимся видом искусства, способом выражения которого являются не слова, звуки или краски, а мысль. Результаты в чистой математике оцениваются не по

*) Пуанкаре А. О науке.— М.: Наука, 1983, с. 219.
**) Coleman A. J., Edwards G. D., Beltsner K. P. Mathematical sciences in Canada.— Science Council of Canada, 38, 1975, p. 46.

непосредственной пользе, которую они приносят и которая обычно отсутствует, а по их логической завершенности и по мастерству их выполнения. Даже если некоторые из них совершенно «бесполезны», они, безусловно, займут место среди культурных ценностей человечества».

Эта цитата еще раз подчеркивает высказанную выше мысль о том, что ценность математики состоит не только в ее практических приложениях, но и в ней самой, как самостоятельной науке.

Приведем еще несколько высказываний о математике, хорошо раскрывающих ее сущность. Э. Т. Белл пишет *): «Не следует думать, что единственная функция математики — «служанки наук» — состоит лишь в том, чтобы служить естествознанию. Ведь математику называют еще и «царицей наук»! Если царица иногда как будто и заимствует что-то у других наук, то она делает это с гордостью, не просит и не принимает никаких привилегий от какой-либо более влиятельной из ее сестер — наук. В математике заключены собственные свет и мудрость, кроме возможных ее применений в науке, и человеческий ум, который улавливает, что математика значит для самой себя, богато вознаграждается. Это не старая доктрина искусства ради искусства. Это искусство ради человечества».

Впрочем, не следует думать, что ценность математики состоит только в том, что она является своего рода искусством. «Математика не музыка,— пишет Л. С. Понтрягин **) — красоты которой доступны большому количеству людей. Математические красоты могут быть поняты лишь немногими специалистами». Поэтому, рассматривая математику как искусство, нельзя объяснить ее важную роль в общечеловеческой культуре и большое значение в жизни и прогрессе человечества. Это можно сделать лишь, рассматривая математику как науку, как совокупность накопленных на благо человечества глубоких знаний, успешно содействующих нашему познанию мира. Эта мысль четко высказана в цитированной выше статье Л. С. Понтрягина: «Математика, возникшая как чисто

*) Белл Э. Т. Творцы математики.— М.: Просвещение, 1979, с. 16.

**) Понтрягин Л. С. Оптимизация и дифференциальные игры.— Успехи мат. наук, 1978, 33, 6, с. 22—28.

прикладная наука, и в настоящее время имеет своей основной задачей изучение окружающего нас мира с целью использовать его для нужд человечества».

Расширение использования и приложения математических методов, в которых нуждаются многие области науки и техники, немыслимо без развития самой математики, и наше время красноречиво подтверждает это: ныне, как никогда, мы являемся свидетелями бурного роста как самой математики, так и роста применений математических методов в других науках. Математика всегда играла и продолжает играть огромную, все увеличивающуюся роль в естествознании, а теперь и в гуманитарных и социальных науках. Ее методы, как методы исследования и описания явлений, их моделирования широко проникают во все науки и с их помощью часто удается достигнуть значительного прогресса. В качестве примера можно привести уже ставшие хрестоматийными такие теоретические открытия, как открытие планеты Нептун, открытие электромагнитных волн или открытие позитрона, сделанные сначала математически «на кончике пера» и лишь потом нашедшие свое экспериментальное подтверждение. Благодаря использованию современных вычислительных машин понятие открытия «на кончике пера» понимается, конечно, в более широком смысле.

В век бурного развития вычислительной техники в математическом моделировании наряду со «старыми» классическими разделами математики, как, например, алгебра, теория дифференциальных, интегральных и разностных уравнений, теория вероятностей, используются и более новые — математическая логика, функциональный анализ, теория машинных языков, теория информации, теория операций и многие другие.

Одним из распространенных способов изучения явлений математическими методами по-прежнему остается моделирование этих явлений в виде дифференциальных уравнений. Для их составления нужно знать только локальные связи и не нужна информация обо всем явлении в целом. Это существенно упрощает задачу, поскольку, образно говоря, в малом все линейно. Например, при составлении уравнений колебаний струны не используется тот факт, что струна, выведенная из положения равновесия, совершает колебательное движение, а используется лишь упругий характер сил сцепления отдельных ее элементов. В результате получается уравнение, решения которого имеют колебательный характер. С его помощью можно провести качественный и количественный анализ движения струны в целом, поскольку оно достаточно хорошо соответствует реально происходящему явлению. Таким образом, в данном случае вся информация о поведении объекта в целом заложена в информации об его локальном поведении, на основе этой информации строится математическая модель, которая дает возможность изучать явление в целом, предсказывать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени.

Напомним, что именно так и было открыто волнообразное распространение электромагнитных волн: от локальных свойств явления к уравнениям, а от уравнений к описанию явления в целом. Не лишне, однако, отметить, что лишь только после экспериментального подтверждения Герцем фактического существования электромагнитных колебаний стало возможным рассматривать уравнения Максвелла как математическую модель реального физического явления.

Нельзя не отметить, что при более глубоком проникновении в тайны природы выясняется, что «в малом» процессы протекают не всегда линейно, что линейность связей между параметрами, описывающими поведение рассматриваемого объекта, получается лишь за счет пренебрежения некоторыми факторами, которые при определенных условиях могут играть существенную и даже решающую роль. Линейность математической модели означает, что внешнее воздействие на нее вызывает изменения ее характеристик, пропорциональные воздействию, а сумме двух воздействий соответствует сумма откликов на каждое из них. Это свойство линейных систем называется принципом суперпозиции. В действительности он выполняется не всегда. Так, например, линейное уравнение теплопроводности получается, если пренебречь явлениями, связанными с конечной скоростью распространения тепла, т. е. пренебречь одним из фундаментальных законов физики. Несмотря на это, линейное уравнение теплопроводности в рамках разумной точности хорошо описывает процессы распространения тепла. Для изучения же более глубоких тепловых процессов приходится привлекать уже более точное нелинейное уравнение теплопроводности, поведение решений которого может не иметь никакого аналога в линейном случае. Именно при изучении нелинейного уравнения теплопроводности А. А. Самарским и его учениками *) было открыто принципиально новое явление в процессе теплообмена, получившее название инерции теплоты и состоящее в том, что при определенных условиях теплота может концентрироваться в определенных зонах, не растекаясь по сторонам.

В настоящее время важность и актуальность изучения нелинейных уравнений математической физики уже не вызывает сомнений, этим и объясняется, что нелинейная теория, в частности нелинейная теория дифференциальных уравнений, привлекает все большее и большее внимание ученых и является одним из самых бурно развивающихся разделов современной математики: разрабатываются как качественные методы исследования нелинейных задач, так и численные методы их решения.

Правильность физической интерпретации математической структуры может быть установлена только непосредственным опытом. Пока он не осуществлен и не привел к положительным результатам, «математическое открытие» в данной конкретной области знания, т. е. умозаключение о свойствах каких-то изучаемых в этой области реальных явлений, сделанное на основе исследования некоторой математической модели, не является еще открытием в рассматриваемой области знания. Так, например, станет или нет действительным открытием теоретическое «открытие» монополя П. Дираком, покажут лишь будущие эксперименты.

При применении математических методов к решению прикладных задач возникают новые математические структуры, которые часто начинают потом изучаться сами по себе, без связи с теми конкретными задачами, которые их породили. Так происходило всегда, например, при истории создания дифференциального и интегрального исчислений на базе изучения задач механики. Происходит это и сейчас, когда создаются математические модели в экономике, биологии, теории управления и других науках. Дать оценку результатам теоретического изучения новых математических моделей, как и вообще любым теоретическим исследовани-

*) Змитриенко Н. В., Михайлов А. П. Инерция тепла.— М.: Знание, 1982.

ям, непосредственно тогда, когда они выполнены, бывает очень трудно, и история знает немало примеров допущенных ошибок при оценке новых теорий. Достаточно вспомнить осуждение Остроградским неевклидовой геометрии, созданной Лобачевским, или враждебное отношение Кронекера к теории множеств Кантора, или порицание многими математиками таких направлений, как топология и математическая логика на заре их создания. И здесь дело не в изолированной точке зрения отдельных ученых: например, в упомянутых случаях и Остроградский и Кронекер являлись выразителями мнения большой авторитетной группы математиков.

Самостоятельное изучение возникающих математических структур и их обобщений закономерно и неизбежно. Только время покажет, изучение каких из этих структур заслуживает пристального внимания, а каких нет.

Немаловажно заметить, что теоретические математические исследования, в отличие от многих других, практически ничего не стоят государству, ибо для их проведения ничего, кроме пера и бумаги (и, конечно, чьей-то головы), не нужно. Математики, ведущие теоретические исследования, обычно занимаются преподавательской деятельностью, принося тем самым непосредственную и ощутимую пользу обществу, и получают за это зарплату, которая является для них надежным обеспечением их средств существования.

Само собой разумеется, что теоретическими исследованиями не должно исчерпываться изучение конкретных задач: практическая ценность математических исследований прикладных задач определяется прежде всего конкретными результатами, значимость которых проверяется на практике. Критерий практики это, конечно, далеко не всегда непосредственный эксперимент. Существуют математические модели, для которых невозможно поставить эксперимент, подтверждающий их соответствие реальной действительности. В этом случае содержательность и правильность математических моделей с точки зрения их применения проверяется косвенным путем с помощью использования их для достижения практических целей, к которым стремится человек.

Неправильная оценка значения математики в научном прогрессе, оценка ее места в науке и ее роли при решении конкретных задач, стоящих перед обществом в данный момент времени, нередко связаны с неправильным представлением о сущности математических знаний, о сущности понятия математической модели, о сущности самой математики и математических методов. Нередко математическая модель смешивается с реальным явлением, для описания которого она пригодна в каком-то смысле, что, кстати, приводит иногда и к искажению целей преподавания математики; и уж во всяком случае порождает весьма спорные высказывания и поток поучений в журнальных статьях и докладах, посвященных вопросу о том, как надо в настоящее время учить математике, чтобы в результате получились специалисты, которые могли бы успешно применять ее к решению прикладных задач (к этому потоку относится, конечно, и настоящее сочинение).

Поясню свою мысль на примере одного старого анекдота.

Физик-теоретик и математик занимались одной и той же задачей, описываемой некоторым уравнением. Однажды математик с радостным видом подбежал к физику и сказал, что наконец-то сегодня он доказал, что уравнение, которым они занимаются, имеет решение.

— Дорогой мой,— ответил ему физик, снисходительно похлопав его по плечу,— если бы я хоть минуту сомневался, что решение существует, то я бы давно перестал заниматься этой задачей!

Этот анекдот как бы говорит,— вот-де мол какие простаки математики, занимаются бесплодными, никому, кроме них самих, не нужными мудрствованиями. Однако если посмотреть чуть поглубже, то нетрудно понять, что это вовсе не анекдот о незадачливом математике, занимающемся бесполезной деятельностью, а анекдот о том, как люди не хотят (а иногда, может быть, не могут) понять друг друга; о том, как люди говорят как будто бы на одном языке, а на самом деле на разных; о том, как, думая, что они обсуждают одну и ту же проблему, они на самом деле имеют в виду разные. Истинная соль этого анекдота в том, что физик говорит о физическом явлении, а математик о его математической модели.

Математическая модель физического явления не является и не может являться идентичной, адекватной самому явлению. Всякое математическое описание явления означает известную его логическую идеализацию, не говоря уже о том, что это описание происходит с определенной степенью точности в результате отбрасывания ряда факторов, которые, несмотря на кажущуюся «незначительность» и «малость», могут в каком-то смысле существенно повлиять на конечный результат. Поэтому из существования решения физической задачи, которое имел в виду физик, не следует существования решения соответствующей математической задачи; ее существование можно установить или опровергнуть только математическими рассуждениями.

Думать, что это не так, т. е. считать, что из существования решения физической задачи следует существование решения ее математической модели, тем самым полагая, что математическая модель равносильна в этом смысле физическому явлению, означает приписывать математике такую силу и общность, которой она, увы, не обладает.

Не спасет здесь положение развитие и совершенствование вычислительной техники: самый «мудрый» блок сверхсовершенной вычислительной машины содержит в себе только ту математическую модель, которая в него заложена или выведена машиной из других заложенных в нее математических моделей, а не само физическое явление, которое описывается рассматриваемой математической моделью.

Отметим, что здесь речь, конечно, вовсе не шла об использовании физической интуиции при исследовании модели физического явления математическими методами. Использование физической интуиции, и не только интуиции, а и обоснованных физических умозаключений, в этом случае, безусловно, целесообразно и весьма полезно. Надо, однако, не забывать о том, что физическая интуиция, наглядная очевидность могут быть и обманчивы: было время, когда понятие абсолютного пространства в физике и понятие одновременности событий в разных его точках казались очевидными. Так было до тех пор, пока ученые не стали изучать электромагнитные явления. При изучении этих явлений пришлось пересмотреть очевидные понятия пространства и одновременности событий. Другой пример. Большинству физиков лет двадцать назад казалось, что протон не может распадаться, так как является легчайшим из барионов (т. е. имеет наименьший барионный заряд) и существует закон сохранения барионного заряда, а сейчас, как известно, многие физики пытаются обнаружить распад протона.

К вопросу об интуиции мы вернемся в дальнейшем. А сейчас подчеркнем, что когда исследуется математическая модель, то физические соображения имеют лишь наводящий правдоподобный характер и не имеют доказательной силы. Вот что по этому поводу пишут А. А. Арсеньев и А. А. Самарский: «Опыт показывает, что на предварительных этапах исследования математически бессмысленные модели (когда у математической задачи нет решения) возникают не так уж редко, поэтому тщательный анализ математической корректности задачи необходим» *). Лишь после того, как математически доказано, что существует решение уравнения, моделирующего некоторое физическое или какое-либо другое реальное явление или, по крайней мере, численно найдено приближение этого решения и опытным путем установлено, что оно соответствует реальной ситуации, можно говорить о том, что рассматриваемая математическая модель достаточно хорошо описывает изучаемое явление и ее можно с достаточным успехом использовать для его исследования, прогнозирования дальнейших событий, для управления входящими в него объектами и т. д. и т. п.

Конечно, совсем не следует думать, что каждое математическое решение задачи, моделирующей некоторое реальное явление, следует проверять эмпирически. Когда уже установлено, что соответствующая математическая модель достаточно хорошо описывает определенный круг явлений (как, например, законы Ньютона описывают механические движения), необходимость экспериментальной проверки, естественно, отпадает.

Приведенный выше анекдот отражает собой также широко распространенную тенденцию обвинения математиков в излишнем увлечении теоремами существования при проведении, например, исследований конкретных задач математическими методами, или при обучении математике будущих физиков, инженеров и т. п. К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем.

---

*) Арсеньев А. А., Самарский А. А. Что такое математическая физика. — М.: Знание, 1983, с. 45.

Подчеркнем еще, что математика изучает математические структуры, которые могут являться моделями реальных физических, химических, биологических, экономических, социальных и других явлений, поэтому, изучая эти модели, мы изучаем тем самым указанные реальные явления, т. е. с помощью математических моделей математика дает возможность исследовать процессы, протекающие в окружающем нас мире. В этом огромное гносеологическое значение математики. При этом не следует забывать, что одна и та же математическая модель может соответствовать совершенно различным реальным явлениям. Так, например, с помощью уравнения Лапласа описываются стационарное распределение теплоты в твердом теле, течение жидкости, явление кумуляции; уравнение теплопроводности наряду с процессом переноса теплоты описывает распределение магнитного поля в проводящей среде, диффузию частиц и распределение вероятности координаты броуновской частицы и т. д.

Это свойство математических структур выражает абстрактность математики. По поводу этого А. Пуанкаре остроумно сказал: «Математика — это искусство давать разным вещам одно наименование». Можно добавить, что не только «давать наименование», но и изучать разные вещи одним методом.

Итак, мы видим, что простая фраза «математика изучает математические структуры» не так проста на самом деле, как она может показаться с первого взгляда.

Абстрактность математики порождает определенную трудность ее применения к описанию конкретных задач, в то же самое время абстрактность математики придает ей силу, универсализм и общность. Не следует смешивать математику и ее применения. Сама математика является абстрактной наукой, а ее применения могут быть весьма конкретными. При этом следует помнить, что нельзя обучить приложениям математики, не научив самой математике. Более того, весьма нецелесообразно и неразумно заниматься решением только прикладных задач, не развивая общую теорию. В дополнение к вышеприведенному высказыванию А. Пуанкаре по этому вопросу (см. с. 66) приведу еще слова К. А. Тимирязева, который, подводя итоги жизни Пастера, писал: «Сорок лет теории дали медицине больше, чем сорок веков практики».

Говоря о математике и математических моделях, нельзя не добавить несколько слов и о математическом моделировании. Выше подчеркивалось, что для построения математической модели нужно обладать не только математическими, но и глубокими специальными профессиональными знаниями. Не нужно, однако, думать, что для успешного математического моделирования необходимо знать и понимать сущность моделируемого физического, биологического, экономического или какого-либо еще процесса, знать причины, порождающие этот процесс. Совсем нет! Может случиться, что эта сущность и вовсе еще не известна, а тем не менее оказывается возможным в случае, если известны определенные связи разных частей изучаемого явления, создать математическую модель, достаточно хорошо отражающую внешние нужные стороны изучаемого явления и тем самым получить возможность изучать его и предвидеть, предсказывать его дальнейшее развитие *). В этом находит свое выражение абстрактность математики. Не следует только смешивать, отметим еще раз, само явление с его математической моделью.

Математическое моделирование в связи с интенсивным процессом математизации наших знаний и широким использованием ЭВМ для изучения разнообразных явлений превращается в настоящее время в один из самых актуальных и основных аспектов развития современной науки. Большой и сложный вопрос о роли математического моделирования, являющегося связующим звеном между математикой и другими науками, в жизни современного общества заслуживает, конечно, специального рассмотрения **). Мы же лишь коснемся этого вопроса еще раз в гл. II, п. 9, когда будем рассматривать вопрос о преподавании математики.

Абстрактность математики, являясь ее специфической чертой, накладывает свой отпечаток и на математическое творчество. Все виды творчества человека, будь это искусство или наука, развиваются по одинаковой схеме на основе интуиции и чувства гармонии.

---

*) Это в равной степени относится и к моделям не математическим, но рассмотрение их не входит в нашу задачу.

**) См. по этому вопросу: Моисеев Н. Н. Математик задает вопросы...— М.: Знание, 1974.

Чисто математическое творчество от других видов творчества существенно отличается лишь последним этапом. Если в искусстве и таких естественных науках, как химия, физика, прикладная математика истинность продукции творчества проверяется конкретным экспериментом, то в чистой математике эта истинность устанавливается логическим доказательством сформулированного предложения. В этом смысле логическое доказательство играет роль своеобразного абстрактного эксперимента.

Характерной чертой математических истин является их абсолютный и вечный характер, следовательно, они не меняются и не могут измениться с развитием наших знаний. Так, за последние две тысячи лет наши представления об окружающем нас мире и об управляющих им закономерностях претерпели существенные изменения, а, например, теорема Пифагора осталась и останется всегда такой же, какой она была в Древней Греции. «Ни тридцать лет, ни тридцать столетий не оказывают никакого влияния на ясность или на красоту геометрических истин — писал Л. Кэрролл.— Такая теорема, как «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», столь же ослепительно прекрасна сегодня, как и в тот день, когда Пифагор впервые открыл ее, отпраздновав, по преданию, свое открытие закланием сотни быков». Это, конечно, не исключает того, что в процессе своего исторического развития многие математические понятия и утверждения не сразу обретали и обретают свою логически законченную форму, не исключает в особенности и того, что в процессе развития одни и те же объекты, изучающиеся в математике, воспринимаются с разных точек зрения, что приводит к раскрытию их новых свойств, наполняет их новым содержанием, что в свою очередь нередко существенно меняет наше представление об их значимости и важности.

Абсолютными и вечными являются и теоремы существования в математике. Тем самым существование в математике имеет другой смысл, чем существование чего-либо в реальном мире, в котором то, что «существует», со временем превращается в то, что «существовало». Конечно, имеется и ряд нематематических утверждений, являющихся вечными и абсолютными истинами: это утверждения, относящиеся к свершившимся фактам. Таковым является, например, утверждение, что в прошлом году после зимы была весна. Математические утверждения отличаются от указанных своей сущностью, они являются вечными абсолютными истинами, так как они представляют собой законы познания и, тем самым, законы, присущие окружающему нас космосу. Это (если мы верим, что наше познание истинно) и делает их абсолютными, вечными и непреложными. Мысль о том, что математические закономерности есть законы реального мира, высказывал еще Ш. Эрмит, говоря: «Но изучение функций анализа есть также и изучение законов природы... Что до меня, то я убежден, что все аналитические факты существуют вне нас и являются нам с той же необходимостью, что и свойства материи и явления реального мира. Вследствие этого я вижу в изучении функций — изучение объективной реальности, а в законах, относящихся к функциям,— отражение физических законов» *).

6. О ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

> Способность к восприятию математики распространена в человечестве, пожалуй, в большей степени, чем способность получать удовольствие от приятной мелодии, она присуща огромному большинству.
>
> *Г. Харди*

При обучении математике ее будущего потребителя встает основной вопрос: «Чему надо учить прежде всего по математике в институте?» в свете происходящей математизации науки в наше время. При этом следует исходить из того, что время, отведенное на изучение математики в высших учебных заведениях, не может быть сколько-нибудь существенно увеличено по сравнению с тем, которое на нее уже отведено. Необходимо также ответить на следующие вопросы. Каково должно быть взаимоотношение дискретной и непрерывной математики? Каково должно быть отношение их объемов в общем курсе математики? Как, на какой основе изучать численные методы? Где их место

*) Цитируется по книге Е. П. Ожиговой «Шарль Эрмит» (М.: Наука, 1982, с. 203).

в общем курсе математики? Где и как обучать студентов использованию вычислительных машин?

Конечно, для представителей разных профессий требуется разный уровень математических знаний. Мы постараемся рассмотреть некоторые общие аспекты обучения математике студентов, которые после окончания института при работе по своей специальности будут использовать математические методы для решения конкретных задач, для теоретических исследований, непосредственно связанных с практикой (механикой, физикой, техникой, биологией, экономикой, управлением и т. д. и т. п.).

Впрочем, формулируемые ниже общие положения о преподавании математики применимы и для подготовки будущих профессионалов-математиков просто потому, что хорошо продуманные методика преподавания и содержание программ обучения всегда оправдывают себя.

Разумеется, при подготовке математиков имеется еще ряд своих дополнительных особенностей, обусловленных тем, что человек, знающий математику,— еще не математик. Чтобы быть математиком, т. е. чтобы творчески работать в математике, надо иметь к этому определенную склонность, надо любить математику, ощущать внутреннюю потребность размышлять над математическими проблемами, должен существовать естественный интерес к решению математических задач. Все это вместе взятое приводит к отсутствию необходимости в принуждении к занятиям математикой человека, обладающего этими качествами. Читатель, интересующийся этим вопросом, может ознакомиться с ним в брошюре А. Н. Колмогорова «О профессии математика» *).

Нельзя здесь не отметить, что вопрос взаимопонимания тех, кто применяет в своей деятельности математические методы исследования для изучения реальных явлений, и так называемых «чистых» математиков — очень сложен. Там, где удается достичь такого взаимопонимания, наступает плодотворное содружество математики и ее приложений. В случае, когда для рассматриваемых приложений уже имеются готовые ма-

*) Колмогоров А. Н. О профессии математики.— М.: Изд-во МГУ, 1960.

тематические понятия и основные математические модели, решение задачи указанного взаимопонимания просто и имеет учебный характер. Эта задача очень сложна в том случае, когда отсутствуют даже элементарные математические модели простейших явлений, когда их надо только еще создавать, как, например, в настоящее время в ряде вопросов экономики, биологии, медицины, социологии, лингвистики. Постоянно возникают новые сложности в преподавании математики и в связи с ее собственным развитием, хотя, конечно, как правило, внедрение новых идей в преподавание математики довольно значительно отстает от их возникновения в ней самой.

Итак, какие же специфические задачи стоят перед высшими техническими и другими специальными учебными заведениями в свете всеобщей математизации науки в настоящее время? С чем непосредственно связано появление этих новых задач?

Причиной их возникновения явились изменения в требованиях, предъявляемых к математическому образованию студентов инженерно-технических, экономических, сельскохозяйственных и ряда других специальностей. Эти изменения вызваны, во-первых, широким внедрением в течение двух последних десятилетий быстродействующих вычислительных машин в самых различных сферах человеческой деятельности, во-вторых, быстрыми темпами развития науки и техники, делающими практически невозможной систему обучения в высшем учебном заведении, при которой выпускаются специалисты, имеющие готовые рецепты для решения всех задач, которые встретятся им в процессе их работы.

Очень часто уже к моменту выпуска специалиста из вуза методы, которым его обучали, оказываются устаревшими. В новых условиях работы для того, чтобы поддерживать свою квалификацию на нужном для работы современном уровне, каждый специалист должен быть в состоянии в случае необходимости пополнить свое образование. Плохо, конечно, если студент в процессе обучения в вузе вследствие недостатка времени не получил конкретных знаний по математике, непосредственно необходимых ему для его работы по специальности, если он не узнал о нужных ему методах и теоремах. Однако в этом нет ничего страшного, если он приобрел при этом необходимую математическую культуру, приобрел прочный фундамент знаний, развил в себе умение и способность самостоятельно пополнять свое образование. В этом случае, владея основными понятиями, лежащими в основе нужной ему теории, и имея необходимую базу для овладения ею, он легко освоит ее и приобретет дополнительные знания, когда они ему понадобятся. Если человек сознает, что он изучает предмет, непосредственно нужный ему для дела, которое он делает или собирается делать, и если он хорошо подготовлен для его изучения, то учиться легко и интересно, знания буквально впитываются. Хорошая подготовка означает, что уже имеющиеся знания базируются на хорошей прочной основе, что выработана хорошая культура мышления, что общее образование в области фундаментальных наук находится на достаточно высоком уровне.

Одним из самых ценных качеств специалиста является умение творчески подходить к решению возникающих перед ним задач в его работе. Например, если дело касается математических методов, творческий подход может означать построение нужной математической модели (если ее еще не было) и изучение ее. Элементы обучения творческому подходу к решению задач, связанных, конечно, в первую очередь с профилем будущей специальности студента, воспитание вообще творческой инициативы должны занимать и занимают существенное место в процессе обучения.

Однако имеется настоятельная необходимость в усилении этой направленности обучения не только в специальных, но и общих дисциплинах. Это возможно осуществить лишь в том случае, если уделить улучшению общего образования в области фундаментальных наук достаточно серьезное внимание.

Внедрение вычислительной техники в нашу жизнь повысило требования к прикладной направленности курса математики в высших технических, экономических, сельскохозяйственных и многих других специальных учебных заведениях, повлекло за собой необходимость знания специалистами, выпускаемыми этими вузами, элементов таких математических дисциплин, как математическая логика, теория графов, теория алгоритмов, теория информации, и сделало возможным значительно более широкое и эффективное использование вероятностно-статистических методов, методов теории игр, методов оптимизации, методов математического моделирования (причем не только детерминированного, но и вероятностно-игрового) и т. п. Важность и нужность этих дисциплин и методов приводят к необходимости включения соответствующих вопросов в программу по математике во многих специальных высших учебных заведениях, а их изучение возможно лишь на хорошей базе общего математического образования.

Таким образом, изменения, которые происходят и будут происходить в ближайшее время в постановке математического образования в вузах в результате новых требований, предъявляемых в настоящее время к выпускникам высших, в частности инженерно-технических, учебных заведений, сводятся к необходимости усиления прикладной направленности курса математики и повышению уровня фундаментальной математической подготовки. Добиться этого при сохранении сроков обучения можно лишь подняв уровень преподавания в высших учебных заведениях, интенсифицировав процесс преподавания, что предполагает, в частности, улучшение методики обучения студентов.

Попробуем сформулировать основные цели, которые стоят перед математическим образованием в целом, например, в высших технических учебных заведениях. Выпускники подобных вузов должны в пределах своей специальности:

а) уметь строить математические модели;

б) уметь ставить математические задачи;

в) уметь выбирать подходящий математический метод и алгоритм для решения задач;

г) уметь применять для решения задач численные методы с использованием современных вычислительных машин;

д) уметь принять качественные математические методы исследования;

е) на основе проведенного математического анализа уметь выработать практические рекомендации.

Конечно, успешно достигнуть поставленных целей не под силу одним математическим кафедрам. Это можно осуществить только при хорошо координированной работе кафедр математики со специальными кафедрами и наличии в институте непрерывной математической подготовки, проводимой силами не только математических, но и специальных кафедр.

На начальном этапе (1-й — 5-й семестры) математическая подготовка студента должна состоять из изучения общего курса высшей математики, курсов программирования и вычислительной математики. Этот начальный этап должен завершаться выполнением курсовой работы по математике. На среднем этапе (6-й — 8-й семестры) должно осуществляться изучение современных прикладных математических методов в курсах специальных дисциплин, читаемых техническими, инженерными кафедрами, и дополнительных спецглав чистой и прикладной математики, читаемых математическими кафедрами. На завершающем этапе изучение и овладение современными прикладными математическими методами должно производиться с помощью спецкурсов выпускающих кафедр, причем эти методы должны находить свое непосредственное применение в дипломных работах студентов. Непрерывная математическая подготовка должна производиться с постоянным использованием ЭВМ различных типов, начиная с первого курса.

При этом обучение самой математике в пределах общего математического курса представляет собой основную и основополагающую часть всего математического образования в целом. Этому вопросу будет целиком посвящена вторая глава книги. Здесь же лишь отметим, что сформулированные нами принципы уже нашли свое отражение в преподавании математики в вузах, где в настоящее время заметны довольно существенные изменения, оказывающие благотворное влияние на математическое образование инженеров. Курс математики приобрел бо́льшую, чем раньше, прикладную направленность. Студенты обучаются использованию современной вычислительной техники для численного решения задач. В программу включены необходимые для этого разделы теории, например элементы теории разностных схем, элементы математической логики и т. п. Обучение численным методам, как правило, основывается на более фундаментальном, чем раньше, общематематическом образовании. Происходит синтез анализа и линейной алгебры, значительно усилилась роль вариационных методов, теории вероятностей и математической статистики, что нашло свое отражение в выделении на них большего, чем прежде, числа часов в общем курсе математики.

Из полезных методических новшеств можно отметить рассмотрение понятия функции как соответствия (это уже начинается со школьного курса и отражает качественно новую точку зрения на функцию), а не с помощью понятия переменной величины; изучение в анализе метода выделения главной части функции как основного метода изучения ее локальных свойств. В связи со всем этим происходит постепенное непрерывное изменение программ преподавания математики во втузах. Эта постепенность разумна, поскольку в традиционном преподавании математики имеется, безусловно, много ценного и полезного. Изучение ряда качественных, аналитических и геометрических методов оправдывает себя и, конечно, будет оправдывать себя еще многие годы. С другой стороны, использование в настоящее время повсеместно ЭВМ предъявляет новые требования к специалистам, которых готовят наши высшие технические и другие учебные заведения. Эти требования должны быть приняты во внимание при обучении студентов уже сегодня.

Вместе с тем серьезно говорить о замене непрерывной (классической) математики дискретной математикой во всяком случае пока еще рано: несмотря на большие возможности современных вычислительных машин роль непрерывных математических моделей в изучении прикладных задач очень велика в настоящее время. Несерьезен и довод сторонников дискретной математики, состоящий в том, что следует отдать предпочтение дискретной математике в силу того, что реальный мир дискретен, и потому дискретная математика его лучше описывает, чем непрерывная. И непрерывная и дискретная математические модели не адекватны реальному явлению. Какую из них лучше применить — зависит от конкретной задачи, от вопросов, на которые нужно ответить, от степени разработанности математических методов, которые можно применить.

В целом надо честно признаться, что мы еще не знаем, как надо наиболее экономно и эффективно учить математике при современных к ней требованиях, не знаем просто потому, что еще не накопилось нужного для этого опыта, не написаны необходимые учебники. Последнее очень важно, потому что сколь бы ни была подробно написана программа, она не может быть повсеместно эффективно введена в действие, если не опубликован соответствующий ей учебник. Вместе с тем отдельные высшие учебные заведения уже накопили интересный опыт модернизированного преподавания математики, поэтому важной и насущной задачей стало изучение этого опыта, выработка общих рекомендаций, написание на основе их общих программ, издание нужных книг, причем не только учебников, но и соответствующих задачников.

При введении новых идей в преподавание математики совершенно необходимо, чтобы эти идеи могли активно применяться учащимися, использоваться ими при решении задач разной трудности, начиная от формальных упражнений и алгоритмических задач до задач, требующих для своего решения определенного уровня изобретательности, при этом набор и тех и других задач должен быть достаточно большим. Студента надо учить думать и работать так, чтобы он умел активно использовать понятия и идеи, с которыми он познакомился в процессе обучения, а этому наиболее эффективно можно научиться с помощью самостоятельного решения задач. Несмотря на то, что это, казалось бы, самоочевидные вещи, о них приходится писать, так как иногда высказывается мнение, что можно идти по другому пути. Какой из возможных конкретных путей изучения математики в высших учебных заведениях при ныне происходящем изменении ее роли в науке лучше, рациональнее, эффективнее — покажет время.

Несмотря на все эти трудности, можно все-таки попытаться сформулировать некоторые общие принципы обучения математике в настоящее время и постараться их детализировать применительно к высшим учебным заведениям (ведь хорошо известно, что в общий принцип можно вкладывать весьма далекие друг от друга его конкретные интерпретации, например, сейчас широко распространено мнение о том, что необходимо сблизить университетское и высшее техническое образование, и каких только конкретных интерпретаций этого не приходится слышать; нередко научный работник-теоретик и инженер-практик вкладывают в эту фразу почти диаметрально противоположный смысл).

В заключение обсуждения вопроса о специфических чертах математического образования в целом следует подчеркнуть его большую роль при формировании общей культуры человека и, тем самым, большую ответственность в этом направлении, которую несут математики перед обществом.

Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и ее преподаванием.

С. Д. Пуассон

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. О СОДЕРЖАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСОВ

Великий математик Карл Фридрих Гаусс в свое время назвал математику «царицей всех наук». Математика скорее добрая фея, только получить у нее можно не волшебную палочку, а надежный и точный инструмент — математические методы.

И. Г. Петровский

Как это ни странно, уже само понимание предмета математики, а значит, его содержание и расстановка в нем акцентов, вызывает разногласие. Мы будем исходить из следующего основного положения.

ПОЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЕ. В курсе математики изучаются математические структуры.

Как уже говорилось, объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты (структуры), у которых описан ряд отношений между их элементами (будем их, как и прежде, называть математическими структурами). Математические структуры могут являться непосредственными математическими моделями реальных явлений. В математических курсах в высших специальных (но не математических) учебных заведениях и должны, конечно, в первую очередь изучаться математические структуры, моделирующие те или иные реальные явления (как, например, производная, моделирующая скорость движения материальной точки, интеграл — работу силы, элементы математической логики — этапы работы вычислительной машины, небесная механика — движение тел в космосе под действием гравитационных сил, и т. п.), а математические структуры, не являющиеся непосредственной математической моделью реального явления, лишь постольку, поскольку они являются удобным математическим аппаратом для изучения математических моделей реальных явлений.

Конечно, цель изучения математических структур (как это отмечалось уже в первой главе) в чистой и прикладной математике различны: в первом случае нас интересуют свойства структур сами по себе, во втором — те выводы, которые можно сделать из их изучения о тех реальных объектах, которые они моделируют.

В математике рассматриваются соотношения между элементами математических структур, количественные и качественные связи между ними. Для чистой математики важна не природа рассматриваемых объектов, а лишь имеющиеся между ними соотношения. Одна и та же математическая структура может описывать (с определенным приближением) свойства очень далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Так, например, формула

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

может описывать и закон Ньютона притяжения масс и закон Кулона притяжения электрических зарядов. Величины масс и зарядов, фигурирующие в этих законах, измеряются в разных единицах, имеют разную размерность. В математической же формуле соответствующие этим законам математические операции (в данном случае умножение и деление) производятся по правилам действия над числами, независимо от того, значениями каких физических величин они являются.

Из сформулированного положения следует, что смысл математического понятия не зависит от области его дальнейшего применения, в частности не зависит от специализации студента, которому разъясняется это понятие.

При этом следует подчеркнуть различие смысла и содержания математического понятия как такового и конкретного явления, для описания которого оно используется, например понятия производной векторной функции и понятия скорости механического движения, понятия интеграла и понятия работы и т. п.

Сущность математики должна находить свое отражение при обучении математике прежде всего в разъяснении истинного смысла изучаемых математических понятий.

Это утверждение, кажущееся многим бесспорным, тем не менее, часто оспаривается. Некоторые считают, что те, кто интересуется математикой не самой по себе, а лишь математическими методами исследования конкретных задач, т. е. приложениями математики, должны обучаться специальной математике, а не той, которой занимаются сами математики. На самом деле такой специальной математики не существует. Смысл теоремы Пифагора или формулы конечных приращений Лагранжа не зависит от того, кто их использует: инженер или научный работник, прикладник или чистый математик. От будущей специальности студента зависит лишь содержание и объем курса математики, отбор математических понятий и фактов, отбор методов, общность и детализация изложения, подбор примеров, иллюстрирующих применение изучаемых математических понятий и методов к решению прикладных задач.

Можно, в принципе, учить приложениям математики вместо самой математики, исходя из будущей специализации. Говорить, например, будущим механикам, что производная есть механическая скорость, что интеграл — работа силы, и рассматривать только размерные величины. Конечно, это будет уже не математика. Возможно, в отдельных случаях (крайне редких, которые даже трудно себе представить) это может оказаться целесообразным. В основном же такой метод обучения плох тем, что человек, изучавший такой специализированный курс, окажется беспомощным, когда он встретится с неизучавшейся им конкретной ситуацией, несмотря на то, что она будет требовать для ее описания или изучения, по существу, того же самого математического аппарата, которому его обучали на конкретных примерах. Он будет беспомощен, поскольку он не был обучен общему подходу, не был приучен к рассмотрению абстрактных математических структур.

Поясним сказанное на примере. Предлагают, например, доказывать теорему о том, что функция, имеющая во всех точках интервала производную, равную нулю, является постоянной, следующим образом. Рассматривают производную как скорость материальной точки. Если скорость равна нулю, то материальная точка неподвижна, т. е. ее путь не меняется — функция постоянна.

Даже если это рассуждение считать доказательством, допустимым для математики, то все равно оно не доказывает высказанного утверждения просто потому, что математическое понятие производной не адекватно физическому понятию механической скорости. Производная является лишь математической моделью механической скорости. Но она является математической моделью и многих других физических понятий, например силы тока, линейной плотности и т. д. и т. п. Если встать на предложенную точку зрения, то придется приведенную теорему доказывать столько раз, сколько имеется физических понятий и явлений, математической моделью которых является производная. Но даже и после этого математическая теорема о постоянстве на интервале функции с нулевой во всех точках производной не будет доказана! Нецелесообразность описанной методики очевидна.

Неслучайно в настоящее время наблюдается ярко выраженная упоминавшаяся выше тенденция сближения университетского и высшего технического образования на основе более общего подхода к изучаемым предметам. Современные темпы развития науки и техники таковы, что в силу быстрого изменения конкретных условий работы делается невыгодным готовить узких специалистов. Сейчас все больше растет потребность в специалистах, которые могут быстро ориентироваться при изменении ситуации, способных правильно оценивать происходящие изменения, приводящие иной раз к качественно совершенно новым явлениям. Эти качества прививаются не узко специальным образованием, а широким общим образованием университетского типа. В настоящее время во многих передовых высших учебных заведениях, готовящих специалистов по современной науке и технике, математические (а также физические, химические и др.) курсы изучаются по одинаковой программе, не зависящей от будущей специальности студента (например, физической, химической, аэродинамической и т. п.). Именно на основе единого институтского цикла, общего для всех факультетов, построена система подготовки специалистов разных профилей в Московском физико-техническом институте.

Много говорится и о том, что учить математике инженеров надо своими особыми методами, не так, как это делают математики. Этот вопрос мы рассмотрим позже, когда будем обсуждать вопросы методики преподавания.

Все сказанное здесь предполагает, безусловно, что рассматриваемые математические понятия изучаются для их дальнейшего использования при математических методах исследования тех или иных вопросов. В случае же, когда знакомятся с математическими понятиями лишь в целях использования их для описания конкретного явления, часто нет нужды разбираться в смысле используемого математического понятия, и можно ограничиться знакомством с ним на интуитивном уровне. На этом мы также остановимся подробнее ниже, когда будем обсуждать пятое положение.

2. О ЕДИНСТВЕ МАТЕМАТИКИ

> Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки: ведь математика — основа всего точного естествознания.
>
> *Д. Гильберт*

ПОЛОЖЕНИЕ ВТОРОЕ. Математика едина.

Это положение означает, что деление математики на чистую и прикладную не может быть строго проведено, что чистая и прикладная математики являются частями единого неразрывного целого, называемого математикой, что эти части невозможно четко отделить одна от другой.

Сразу заметим, что это положение не означает тождества чистой и прикладной математики, подобно тому, как единство жизни не означает тождества одноклеточного организма и человека. Чистая и прикладная математики — разные части одной и той же науки, разные по своему содержанию, по своей значимости, по той роли, которую они играют в жизни современного общества.

Чтобы подтвердить справедливость высказанного тезиса о единстве математики, надо более обстоятельно разъяснить, что мы вкладываем в понятия «чистая математика» и «прикладная математика».

В первой главе книги уже говорилось о том, что постановка задач и оценка результатов их решения в чистой и прикладной математике различны. Источники задач, которые решаются в прикладной математике, и конечные цели, которые преследует их решение, лежат вне математики, хотя промежуточные задачи, методы и цели могут иметь чисто математический характер (как, например, создание и изучение тех или иных численных алгоритмов) и, несмотря на то, что они являются промежуточным этапом, именно они часто являются не только принципиально важным, но и основным шагом в процессе решения основной задачи и достижения намеченной цели. Еще раз подчеркнем, что, таким образом, чистую и прикладную математику отличают, прежде всего, цели: чистая математика отвечает на математические вопросы, в ней решаются внутренние математические проблемы, а в прикладной — даются методы решения задач, возникающих вне математики.

Чистая математика, как это неоднократно отмечалось, представляет собой теорию математических структур, которые изучаются сами по себе без связи с реальными явлениями (физическими, химическими, биологическими, экономическими, социальными или какими-либо еще), которые они могут, но не обязаны, моделировать. При этом для чистой математики, как правило, характерно, что исследования (качественные и количественные) приводятся с достаточной общностью, изучаются не отдельные конкретные объекты, а определенные классы объектов, устанавливаются общие методы и алгоритмы решения широкого круга задач.

К прикладной же математике относится та часть математики, в которой изучаются математические структуры, моделирующие те или иные реальные явления, т. е. прикладная математика есть наука, изучающая реальные явления математическими методами.

Как мы уже знаем, математическое изучение реальных объектов начинается с их математического моделирования, т. е. использования для их описания некоторых математических структур, либо уже ранее известных, либо специально построенных для рассматриваемого случая. Обычно эти модели записываются с помощью уравнений или неравенств или того и другого. В результате изучения этих моделей часто возникают другие математические модели (структуры), которые в свою очередь начинают изучаться, и, таким образом, прикладная математика является мощным источником новых математических структур. Исследования по прикладной математике нередко приводят к созданию целых новых научных направлений. Именно таким образом во второй половине нашего века оформились в самостоятельные ветви математики теория информации, теория операций, теория случайных процессов, теория оптимального управления, математическая экономика и т. п. Более того, при исследовании тех или иных реальных объектов математическими методами возникли и новые самостоятельные науки, например теоретическая механика, небесная механика, гидродинамика, квантовая физика и многие другие.

Целью изучения математических моделей в прикладной математике является в конечном итоге исследование соответствующего конкретного реального явления. Поэтому в прикладной математике наряду с изучением общих методов большое место занимает и изучение более частных специальных методов, непосредственно связанных с данным реальным объектом. Конечно, как и при отыскании математической модели, моделирующей рассматриваемое явление, при изучении этой модели не всегда удается обойтись имеющимися в математике ресурсами. Даже в случае, когда имеются методы изучения нужной математической модели, эти методы могут оказаться не приспособленными для получения требуемых результатов. В этом случае приходится создавать новые специальные методы для решения поставленной задачи, которые также нередко оказываются источником новых общих методов в математике.

После построения математической модели для нее ставится математическая задача, решение которой должно привести к требуемым выводам о рассматриваемом объекте (например, к указанию оптимальных для поставленных целей параметров объекта, к получению количественных характеристик протекающих процессов, к прогнозированию их протекания в будущем, к рекомендациям о таком управлении процессами, при котором они будут протекать в нужном направлении и т. п.). После этого проводится, если это нужно и возможно, качественное исследование модели. Здесь иногда удается воспользоваться уже известными методами (по своей сущности относящимися к чистой математике) либо приходится создавать новые. Как правило, качественных исследований математической модели конкретного объекта обычно бывает недостаточно, и для получения количественных его характеристик приходится прибегать к численным решениям уравнений и неравенств с помощью компьютеров. Здесь нередко сразу возникает много трудных задач. Для того чтобы математическую модель можно было использовать для численных расчетов, надо, прежде всего, ввести в компьютер какие-то числовые данные, которые берутся из опыта. Вопросы о том, какие данные опыта целесообразно выбрать, а выбрав, как их использовать, годится ли для них уже построенная математическая модель объекта или ее надо подправлять (а может быть, и заменить другой), получится ли при сделанном выборе числовых данных результат нужной точности, который на самом деле будет давать нам нужные характеристики, часто бывают очень сложными и нетривиальными. Наконец, чтобы после введения числовых данных в компьютер было возможно численно решить задачу, необходимо либо уже иметь готовые алгоритмы для численного решения получившейся задачи, либо при отсутствии таковых разработать их. Теория численных алгоритмов решения разного рода уравнений и неравенств является важным разделом прикладной математики. Вместе с тем поскольку эта теория имеет дело уже с математическими структурами, безотносительно к реальным объектам, которые они моделируют, то она по своей сути с полным правом может быть отнесена к чистой математике, и включение ее в прикладную математику является просто традиционным. Иначе говоря, любые численные методы, численные алгоритмы решения математических задач, независимо от того, относятся ли они к решению конкретной задачи или к решению достаточно широкого круга задач (например, численному решению уравнения Лапласа, без рассмотрения конкретного объекта, для которого оно может являться математической моделью), принято относить к прикладной математике, а не к чистой. Следует заметить, что численные методы начинают приобретать все большее и большее значение не только для исследований по прикладной математике, но и по чистой, что будет показано в дальнейшем на примере решения проблемы четырех красок.

Отметим еще, что при переходе к численному решению задачи после качественного ее исследования приходится часто снова начинать с математического моделирования изучаемого объекта, так как нередко случается, что математическая модель, которая годилась для качественного изучения объекта, оказывается непригодной для численных расчетов, а затем заниматься разработкой методов для решения возникшей задачи (если, конечно, старые методы не подходят для этой цели). Таким образом, численные методы, как и вся прикладная математика в целом, являются также одним из источников новых математических структур и новых математических методов.

Следующий этап состоит в подготовке нужного для численного решения задачи на компьютере математического обеспечения, т. е. выборе машинного языка, подготовки программ для осуществления на компьютере вычислений и т. п. Здесь также либо используются уже имеющиеся программы, либо разрабатываются новые. В целом же разработка математического обеспечения для ЭВМ представляет собой самостоятельную область прикладной математики со своими внутренними проблемами и методами, тесно связанными с математической логикой, являющейся разделом чистой математики.

Наконец, производятся вычисления на компьютере, в результате получается новый набор числовых данных и снова возникают свои трудности. Найденное решение задачи, как всякое решение, полученное с помощью численных расчетов, дает приближенный результат. Надо суметь определить, как сказались на этом результате погрешности исходного эксперимента и погрешности самих вычислений, и получить в результате надежную полезную информацию, проанализировав которую, выдать практические рекомендации. Может оказаться, что эти рекомендации недостаточны для поставленных целей, тогда приходится уточнять математическую модель объекта и повторять весь цикл заново.

Отметим, что перечисленные этапы изучения математическими методами реального объекта соответствуют перечисленным в п. 6 главы I (см. с. 82) целям, которые ставятся перед обучением математике студентов высших технических учебных заведений. Это, безусловно, естественно, так как эти студенты должны овладеть применением математики в своей специальности, а общая методика математического исследования практических задач не зависит от их конкретного содержания.

Качественные и количественные исследования математическими методами реальных объектов с помощью изучения их математических моделей не являются прерогативой только прикладной математики. Так же точно поступают и в науках, которые, как это было отмечено выше, отпочковались в самостоятельные области человеческого знания от прикладной математики (теоретическая механика, теория упругости, аэродинамика, квантовая физика и т. п.). Точнее, здесь практически невозможно провести точную границу между прикладной математикой и каждой из указанных наук. Более того, можно было бы с полным основанием считать, что все они являются частями прикладной математики. Однако принято достаточно глубоко разработанные общие математические теории определенных объектов рассматривать как самостоятельные науки: математическая теория микромира называется квантовой физикой, математическая теория движущейся жидкости — гидромеханикой и т. д. Так, конечно, и следует поступать, ибо в каждой из этих теорий имеется много специфических лишь для нее методов, которые (самое главное) приспособлены к свойствам реальных объектов, изучаемых в этой конкретной теории. Таким образом, прикладная математика неразрывно связана и, более того, пересекается со всеми естественными и многими гуманитарными науками.

Из всего сказанного следует, что прикладная математика, состоящая из математического моделирования реальных объектов, качественного и количественного анализа математических моделей реальных объектов, теории алгоритмов численного решения возникающих при этом анализе математических задач, математического обеспечения, нужного для осуществления вычислений по соответствующим алгоритмам на компьютерах и анализа численных решений задач, во всех своих разделах широко использует методы чистой математики. Действительно, и математическое моделирование, и качественные и количественные изучения математических моделей немыслимы без методов математического анализа (в частности, теории дифференциальных уравнений и функционального анализа) и алгебры, а математическое обеспечение — без математической логики и той же алгебры. Эти обстоятельства и обеспечивают неразрывную связь между чистой и прикладной математикой.

Однако роль и значение прикладной и чистой математики в жизни общества совершенно различны. Уровень развития прикладной математики в стране, наличие современной электронно-вычислительной техники и умение ее использовать составляют один из важных показателей экономической мощи страны. Эта специфика прикладной математики влечет за собой и особенности работы прикладных математиков, их большую ответственность за получаемые ими результаты, так как допущенная ошибка в проведенных ими расчетах может дорого обойтись людям. В то же самое время, если чистый математик допустит какую-либо ошибку в доказательстве какой-либо теоремы, это в худшем случае огорчит лишь нескольких его коллег. При всем этом следует еще раз подчеркнуть, что без развития чистой математики, без глубоких достижений в ней были бы невозможны и большие успехи, которые наблюдаются в прикладной математике.

Вот именно с этим и связано единство чистой и прикладной математики, о котором шла речь в высказанном положении. В нем говорилось о неразрывной связи чистой и прикладной математики, об общей сущности той и другой, заключающейся в изучении математических структур, в общности методов, применяемых для изучения этих структур, о невозможности изучать прикладные математические задачи без знания понятий чистой математики, без овладения этими понятиями.

Как уже отмечалось, многие математические модели и методы исследования, возникшие так или иначе в недрах прикладной математики, начинают изучаться сами по себе или, соответственно, применяться для изучения математических моделей (структур) без связи с реальными объектами и тем самым делаются достоянием чистой математики. Наблюдается, безусловно, и обратное явление, при котором методы, созданные в чистой математике, находят свое эффективное применение в прикладной математике и, более того, в непосредственных приложениях математики к решению прикладных задач. Обо всем этом подробно говорилось в первой главе.

Все сказанное уже показывает неразрывную связь чистой и прикладной математики. Однако указанная связь на самом деле более существенна и более глубока — она пронизывает всю сущность методов, применяемых в этих областях.

И это несмотря на то, что в той части математики, которую называют чистой, критерием для оценки полученных результатов является их логическая завершенность, установление новых связей между внешне далекими понятиями, наличие методов, дающих возможность решать новые задачи, короче, степень существенности продвижения вперед на пути познания свойств математических структур, а в прикладной математике критерием ценности результата является его практическая значимость, возможность его использования для изучения или воздействия на изучаемое явление, прогнозирования его дальнейшего состояния и т. п. Дело в том, что как в чистой, так и в прикладной математике поставленные цели достигаются в принципе одним и тем же способом — изучением абстрактных математических структур. Именно это и является основой единства математики.

Проанализируем единство методов в математике более подробно на примере численных решений задач (что большей частью является необходимым при решении практических задач). Убедительно высказывание С. Л. Соболева об их связи с областями математики, внешне, казалось бы, очень далекими от приложений, которое содержится в предисловии к его монографии «Введение в теорию кубатурных формул» *). Он пишет: «...теория вычислений, которую сейчас так же невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин».

В численных методах, прежде всего, занимаются отысканием и изучением алгоритмов численного решения задач, теоретической оценкой их качества: устойчивости, экономичности, сходимости, точности и т. п. Эта деятельность не только по своему характеру (как это отмечалось выше) относится к чистой математике, но и развивается на базе ее классических разделов и при тесном взаимодействии с ними (с математическим

---

*) Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.

анализом в широком смысле этого термина, с алгеброй, с математической логикой и т. д.).

Численное решение какой-то задачи обычно представляет собой завершающий этап ее решения, который осуществляется после определенного качественного ее исследования. Поясним это на примере (приводимом в подобной ситуации А. Н. Тихоновым) решения системы линейных алгебраических уравнений в случае, когда число уравнений равно числу неизвестных. Рассмотрим два вопроса. Первый: когда существует, и притом единственное, решение такой системы? Второй: если оно существует, как его найти?

Теория дает исчерпывающий ответ на оба вопроса: единственное решение существует тогда и только тогда, когда определитель системы не равен нулю, и для решения в этом случае имеются формулы Крамера.

Казалось бы, что тем самым задача решена и с вычислительной точки зрения. Однако это не так. Прежде всего, с точки зрения численных методов такая постановка вопроса о единственности решения задачи лишена смысла — с определенной точки зрения оно всегда не единственное.

Действительно, на практике коэффициенты системы всегда задаются с определенной степенью точности, и поэтому говорить о ее решении имеет смысл также только с определенной степенью точности: любой набор числовых значений неизвестных, удовлетворяющий рассматриваемой системе с указанной степенью точности, является приближенным решением. Таким образом, при численном решении задачи мы встречаемся здесь с существенно новой, более сложной постановкой самой задачи, по существу, задачей решения неравенств, а не уравнений. Далее, оказывается неудобным использовать и формулу Крамера для отыскания значения неизвестных. Если определитель системы будет «близким к нулю» (например, если его нулевое значение будет находиться в пределах допустимой точности задания коэффициентов), то результат вычисления решений по формуле Крамера может оказаться лишенным практического смысла, да и сама постановка задачи требует дальнейшего уточнения.

Впрочем, и в том случае, когда определитель системы не равен нулю в пределах допустимых значений ее коэффициентов, формулы Крамера практически не пригодны для численного решения системы, так как число необходимых для этого операций при таком способе решения очень быстро растет с увеличением числа неизвестных и объем необходимых вычислений делается практически неосуществимым.

На этом примере видно, что с прикладной точки зрения теоретическое решение задачи дало лишь объективную уверенность в существовании решения. Это очень важно, поскольку, будучи уверенным, что решение существует, с большой надеждой на успех можно попытаться найти корректную постановку задачи численного решения уравнений и методов практического нахождения решений. В рассмотренном случае для этой цели оказываются более удобными методы исключения переменных или методы последовательных приближений.

Знание того, что объект, который мы исследуем, действительно существует, дает возможность более правильно выбрать направление поисков. Если бы мы всегда обладали такими знаниями, сколько было бы сэкономлено бесполезных усилий, напрасно затраченного времени и бесплодного труда: достаточно вспомнить бесконечные попытки выполнить трисекцию угла или квадратуру круга с помощью циркуля и линейки (увы, продолжающиеся до сих пор со стороны тех, кто не признает теорем существования и не существования) или попытки сооружения перпетуум мобиле.

Правда, не следует забывать, что даже на ложном пути можно делать полезные и важные открытия. Так, химия возникла из бесплодных попыток алхимиков найти философский камень, а многим открытиям в астрономии мы обязаны астрологам, изучавшим небесную твердь для составления гороскопов. Тем не менее бесспорным является тот факт, что правильная постановка задачи существенно помогает целесообразному выбору усилий, направленных на ее исследование и тем самым является важным этапом на пути ее решения.

Итак, вопросы численного решения задач приводят к новым проблемам, к новым постановкам, и оказывается, что теоретические качественные исследования (в частности, теоремы существования) помогают правильно их поставить. На базе фактов чистой математики возникают новые, характерные именно для численных методов, задачи: задача о наиболее «выгодном» в том или ином смысле способе численного решения, задача об устойчивости применяемого численного метода и т. п. Сама классическая форма математических теорем «если ..., то ...» приобретает, по словам А. Н. Тихонова, новый аспект. Годятся только те «если», которые можно проверить на практике, которые можно задать с нужной степенью точности. Только такие «если» могут рассматриваться при решении прикладных задач.

Ситуация, при которой численные методы применяются для решения задачи, когда она теоретически достаточно полно исследована, является идеальной и не всегда наблюдается. Нередко численные методы применяются для решения задач, для которых не доказано существование решения и, более того, не обоснована корректность применяемых численных методов. Математические трудности, возникающие при решении таких задач, не вызывают сомнения и, конечно, заслуживают самого внимательного изучения.

Тесная взаимосвязь чистой и прикладной математики проявляется и в том, что современная вычислительная техника дает в руки математиков принципиально новые возможности не только для получения численных решений задач, но и для изучения теоретических проблем.

Замечательным примером использования современных компьютеров в исследованиях по чистой математике является решение знаменитой проблемы четырех красок, поставленной еще в середине прошлого столетия.

Это проблема состоит в следующем. Плоскость разбивается на области (которые называются «странами») с помощью конечного числа гладких кривых без самопересечений. При этом любые две из этих кривых либо не пересекаются, либо пересекаются в концевых точках, и любая концевая точка каждой из указанных кривых является и концевой точкой по крайней мере еще одной кривой. Тогда каждая такая кривая входит в границу в точности двух стран, называемых соседними. Совокупность конечного числа полученных таким образом стран называется «картой».

Проблема состояла в нахождении минимального числа различных цветов, которыми можно раскрасить любую карту таким образом, чтобы каждые две соседние страны были окрашены в разные цвета (такая раскраска карты называется правильной).

В конце XIX века было установлено, что для правильной раскраски любой карты достаточно пяти цветов, пяти различных красок. А можно ли это сделать с помощью лишь четырех красок? Несмотря на многочисленные попытки ответить на этот вопрос (получивший название проблемы четырех красок), до самого последнего времени ответа на него не было получено. В силу простоты своей формулировки эта проблема постоянно привлекала к себе внимание, причем не только профессионалов-математиков, но и многочисленных любителей. И вот недавно было опубликовано сообщение о том, что проблема четырех красок решена американскими математиками К. Аппелем и В. Хакеном *). Именно ими доказано, что любую карту можно раскрасить правильным образом с помощью четырех различных красок, т. е. так, что каждые две соседние страны будут окрашены в различные цвета. При этом, что очень интересно, решение этой проблемы было получено с существенным использованием современных компьютеров.

На первый взгляд это выглядит неожиданно и даже неправдоподобно: доказательство чисто геометрической теоремы с помощью вычислений на счетной машине!

Для пояснения заметим прежде всего, что проблеме четырех красок можно придать арифметический характер, что, кстати, было понято еще в XIX веке. Это удобно сделать, сформулировав проблему четырех красок на языке графов, перейдя от заданной карты к так называемому дуальному к ней графу. Для этого в каждой стране выбирается по точке (вершине графа), которые соединяются между собой кривыми (ребрами графа) в том и только том случае, если эти точки были выбраны в соседних странах.

Теперь ясно, что задачу о правильной раскраске карты можно заменить задачей правильной раскраски вершин получившегося плоского графа, т. е. такой раскраски, при которой две вершины графа, принадлежащие одному и тому же ребру, имеют разный цвет.

Начало изучению связей проблемы четырех красок с арифметическими свойствами графа было положено

---

*) Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable.— Bulletin of the American Mathematical Society, v. 82, № 5, September 1976, p. 711—712.

еще в том же XIX веке. Первые числовые оценки в этом направлении принадлежат английскому математику П. Хивуду (1890 *)). В течение последующих почти ста лет благодаря усилиям многих математиков на этом пути был сделан ряд существенных шагов вперед, но лишь только в 1976 г. было получено положительное решение всей проблемы.

Но как же все-таки с помощью компьютеров было доказано, что для правильной раскраски вершин рассматриваемых плоских графов достаточно четырех красок? Ведь на компьютере можно провести вычисления лишь для конкретного, пусть с очень большим числом ребер и вершин, графа. Как же отсюда сделать заключение о раскраске любого конечного плоского графа? Для этого необходимо делать логические заключения, которые в нужной степени (во всяком случае, в настоящее время) вычислительные машины не умеют делать. Ведь компьютер не всемогущ: он может, например, вычислить сумму данного ряда с нужной нам точностью, но он не умеет исследовать сходимость рядов. Подобные действия остаются пока прерогативой человека.

Конечно, проблема четырех красок и не была решена с помощью одних лишь вычислений. Она была сначала редуцирована к некоторым частным вопросам, имеющим чисто арифметический характер, на которые можно было получить ответ, проведя определенные конкретные численные расчеты. Эти расчеты потребовали очень большого числа вычислений, которые были бы не под силу человеку, не вооруженному современной вычислительной техникой. Таким образом, нет ничего удивительного, что решение проблемы четырех красок не было получено этим путем в то время, когда не существовало быстродействующих вычислительных машин, которые теперь имеются в распоряжении человека.

Из этого примера видно, как продолжает расти сфера применения компьютеров: с помощью их решается все больше и больше разнообразных задач, возникающих в самых различных областях человеческой деятельности.

---

*) Более подробно об арифметических соотношениях, связанных с проблемой четырех красок, можно прочитать в монографии А. А. Зыкова «Теория конечных графов» (Новосибирск: Наука, 1969), § 48, Проблема четырех красок.

Впрочем следует отметить, что далеко не все математики признают, что решение проблемы четырех красок с применением на определенном этапе компьютера действительно является ее решением. Вот, что пишет мне по этому поводу письмо Н. М. Нагорный (цитируется с его любезного разрешения):

«Мне кажется (хотя об этом даже говорить как-то неудобно: выглядишь «непрогрессивным»), что есть серьезные возражения против того, чтобы считать работу К. Аппеля и В. Хакена решением проблемы четырех красок. Отношение к ней очень зависит от того, что мы согласимся рассматривать в качестве доказательства в математике. Традиционно принято считать, что в основе доказательства должно лежать рассуждение, зафиксированное в виде текста. Текст этот должен допускать прочтение, он должен быть открыт для поиска в нем ошибки. Он может нуждаться в дополнениях, комментариях, даже — на худой конец — в исправлениях. Но и то, и другое, и третье снова должно быть текстом. (Кстати, представляя такой текст, автор всегда берет на себя ответственность за его правильность.)

Аппель и Хакен предлагают считать элементом доказательства некоторый физический процесс — процесс вычислений на ЭВМ, протекший и исчезнувший бесследно. Даже если доказать, что их программы были составлены правильно, все равно нельзя быть уверенным, что правильно работала машина, и, в частности, то устройство, которое напечатало заключительный ответ. А вдруг машина дала «сбой»? Кроме того, мы должны верить авторам на слово, что она выдала именно тот ответ, который они сообщают. Разумеется, я не собираюсь ставить под сомнение их научную добросовестность, но я бы не рискнул предложить читателю решение знаменитой проблемы, содержащее предложение в таком-то пункте поверить на слово. Авторские утверждения должны допускать проверку, и автор должен сам об этом заботиться.

Мне кажется, что протекший и никак не зафиксированный процесс в ЭВМ так же мало годится быть элементом доказательства, как и процессы, протекающие в синхрофазотронах, паровозах или, например, в утюгах. То, что ЭВМ является машиной, используемой математиками, не меняет сути дела. Главная же беда ситуации заключается в том, что этот процесс не только не зафиксирован, но и никак не может быть зафиксирован в принципе. В самом деле, пусть он протекает на какой-либо машине M_1. Человек не в состоянии контролировать ее работу: смена ее состояний не может фиксироваться органами его чувств. Это могла бы сделать только какая-нибудь другая машина M_2. Но чем M_2 лучше M_1? Значит, нужна еще и M_3, которая будет проверять работу M_2. И т. д. Таким образом, налицо регресс в бесконечность.

Для меня лично из работы Аппеля и Хакена вытекает только то, что принимая во внимание их бесспорную научную добросовестность и профессиональную компетентность, а также высокую надежность имевшейся в их распоряжении ЭВМ, я теперь буду считать малоперспективным поиск контрпримера к проблеме четырех красок. Но решения проблемы, как я его понимаю, у авторов нет. И на этом пути, как мне кажется, его и быть не может.

Следует, может быть, добавить, что повторный счет может только повысить нашу уверенность, но в принципиальном отношении он не дает ничего нового. Кроме того, со временем ЭВМ, на которых производились вычисления, отомрут, и тогда это «доказательство» нельзя даже будет воспроизвести, так что оно перестанет, быть может, удовлетворять простому критерию научности».

К настоящему времени положение с решением проблемы четырех красок несколько изменилось. Первоначальное решение Аппеля и Хакена было необозримо сложным. Однако впоследствии под руководством американского математика П. Коэна было получено другое, более простое решение проблемы четырех красок также с помощью вычислений на компьютере. Это решение, по сообщениям, может быть описано в книге среднего размера, и все необходимые вычисления могут быть проделаны вручную одним человеком в течение нескольких лет. Вряд ли кто-нибудь возьмется за такую работу. Хочется надеяться, что в конце концов доказательство решения проблемы четырех красок будет найдено в обозримой традиционной для математиков форме. Все сказанное, безусловно, нисколько не умаляет замечательного достижения Аппеля и Хакена — решения с помощью ЭВМ проблемы четырех красок, независимо от того, считать ли это за истинное окончательное ее решение или нет.

Поскольку математика едина, то чистую математику и численные методы следует изучать как единое целое. Это естественно, ибо теоретические качественные и численные методы решения задач тесно переплетены между собой, причем численные методы базируются на тех или иных теоретических изысканиях, излагаются на языке абстрактных математических понятий. В силу всего сказанного численные методы разумно изучать на основе теоретического курса, а не подменять теоретический курс изложением набора отдельных рецептов численного решения задач.

При этом прежде всего надо четко представлять себе, что означает одновременное изучение чистой и прикладной математики, что означает прикладная направленность курса высшей математики, в чем конкретно состоит цель, к которой следует стремиться при обучении математике в высшем техническом учебном заведении.

Обычно для достижения этой цели рекомендуется вставлять в курс математики различные численные методы решения задач, как-то: приближенные вычисления значений функций, приближенные методы вычисления интегралов, приближенные методы решения систем линейных уравнений, приближенные методы вычисления обратных матриц, собственных значений матриц и так далее и тому подобное. Отмечается, что при этом желательно давать и методы оценки погрешностей полученных результатов — без указания хотя бы грубой оценки отклонения приближенного результата от истинного подобные методы не представляют интереса. Правда, иногда приходится мириться с тем фактом, что нужную погрешность удается установить не теоретически, а лишь проверить экспериментально в ряде конкретных случаев. Это, конечно, не является доказательством полученной оценки, но иногда оказывается достаточным для поставленных практических целей.

Все эти рекомендации безусловно справедливы: изучение отдельных методов численного решения задач является неотъемлемой частью общего математического образования и безусловно полезно, причем не только для тех, кто будет заниматься приложениями математики к решению конкретных задач, но и для тех, кто будет разрабатывать теоретические проблемы в той или иной области человеческого знания, в том числе и в чистой математике. Но было бы заблуждением считать, что включение изучения решений отдельных задач численными методами полностью решает вопрос о прикладной направленности математического обучения.

Решение этого вопроса в действительности гораздо сложнее.

Например, если представить себе деятельность геодезиста, связанную с измерениями на местности, то ему при проведении расчетов вряд ли поможет знание методов, с помощью которых были составлены таблицы, применяемые им в повседневной работе, или знание тех принципов, на которых основана реализация программ для ЭВМ, используемых им для проведения нужных вычислений. Для него гораздо важнее умение поставить математическую задачу, провести ее необходимый предварительный качественный анализ, подготовить ее для численного решения, а сам процесс этого решения для него не представляет интереса.

Умение нужным образом применять математические методы для решения практических задач с тем, чтобы получать требуемые результаты, и является основным критерием для оценки правильной постановки обучения, правильной ориентации будущих прикладных математиков. Для этого недостаточно (хотя, безусловно, и необходимо) знание одних численных методов. Нужно более широкое знакомство с математикой в целом, так как большей частью все конкретные задачи решаются с помощью и на основе имеющихся теорий, в том числе и математических.

Для достижения указанной цели отбор изучаемого материала играет первостепенную роль. Было бы неправильным ограничиваться в основном изучением методов, близких к численным методам или по своему духу, или по непосредственным связям. Здесь имеются в виду, например, методы выделения главной части функции в окрестности точки и методы аппроксимации функций в целом, применение этих методов для решения различных задач, касающихся как качественных исследований, так и имеющих оценочный характер. Безусловно, изучение подобных методов необходимо, очень полезно и потому должно составлять неотъемлемую часть математического образования. Пренебрежение этими, в определенном смысле конкретными, разделами и преждевременное увлечение общими теориями на первых ступенях математического образования наносят последнему существенный вред.

Однако переход к изложению общих точек зрения на изучаемые объекты на следующих этапах обучения безусловно необходим, ибо он дает современному специалисту необходимую широту взгляда, необходимую математическую культуру. Следует только помнить, что общие теории особенно полезны тогда, когда имеются частные примеры для их применения, когда эти примеры сами по себе являются для учащегося естественными, хорошо знакомыми и освоенными.

Из всего сказанного следует, что практическая направленность математического обучения, прежде всего, имеет своей основой достаточное богатство и разнообразие изучаемого материала.

В связи с этим необходимо еще раз напомнить об имеющейся здесь опасности излагать материал «в полном объеме». Следует всегда помнить, что дело не в том, чтобы сообщить учащемуся десятки теорем, а прежде всего в том, чтобы учащийся активно овладел основными понятиями. В основе обучения должно лежать положение, что «лучше знать меньше, да хорошо», нежели иметь поверхностное знакомство со многими вопросами. На базе основательных знаний воспитывается математическая культура, необходимая для правильного использования математического аппарата. Надо всегда тщательно отбирать необходимый для студента минимум знаний, и только после его освоения можно допускать дальнейшее увеличение изучаемого материала. Имея прочную базу знаний, на ее основе легко можно продолжить дальнейшее образование в нужном направлении. В этом случае качество легко переходит в количество.

Очень важными являются философско-идеологические основы курса высшей математики. Именно с самого начала в этом курсе при изучении теоретических основ следует идеологически готовить студента к численному решению задач, как к следующей, в известном смысле более сложной, ступени изучения математических моделей, и, вместе с тем, прививать ему практические навыки обращения с современной вычислительной техникой: для современного студента использование в случае необходимости ЭВМ должно быть столь же естественным и простым, как для школьника обращение к таблице значений логарифмов или синусов. Как же всего этого достичь?

Прежде всего, с самого начала обучения математике в высшем учебном заведении целесообразно обращать внимание на характер доказательств рассматриваемых в курсе теорем, отмечая, когда он является алгоритмическим, а когда нет. Например, полезно проанализировать тот факт, что доказательство теоремы о существовании максимума и минимума у непрерывной на отрезке функции, проводимое с помощью принципа компактности, не дает возможности фактически найти точки экстремума.

Небезынтересно обратить также внимание на то, что не является алгоритмическим и доказательство теоремы Коши о том, что всякая непрерывная на отрезке функция, принимающая на его концах значения разного знака, обращается в некоторой точке в нуль, если это доказательство проводить, как обычно, с помощью последовательного деления отрезков пополам. В самом деле, может случиться, что мы уже не сможем узнать, равна ли функция нулю в середине отрезка или какой она там имеет знак: если функция задана на отрезке в том смысле, что имеется способ, как в каждой точке отрезка вычислить ее значение, то, сколько бы десятичных знаков у значения функции в средней точке отрезка ни оказались равными нулю, нет никакой гарантии, что какой-то следующий знак не будет отличен от нуля. А от этого зависит весь дальнейший процесс отыскания точки, в которой функция обращается в нуль. С помощью последовательного деления отрезка пополам для заданной непрерывной функции f и заданного $\varepsilon > 0$ можно алгоритмически найти лишь такую точку x, что в ней будет выполняться неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon$$ *).

Впрочем отметим, что если заданная функция f монотонна и дифференцируема на рассматриваемом отрезке, причем абсолютная величина ее производной ограничена снизу положительной постоянной $c > 0$, то

---

*) Подробнее об этом см. в книге А. А. Маркова и Н. М. Нагорного «Теория алгорифмов» (М.: Наука, 1984).

при заданном $\varepsilon > 0$ точка x, в которой $|f(x)| < \varepsilon$, отличается от истинного корня уравнения $f(x) = 0$ не более чем на $\frac{\varepsilon}{c}$. Таким образом, в этом случае (а подобные случаи чаще и встречаются на практике) метод последовательного деления отрезка пополам является алгоритмическим методом для отыскания корня уравнения $f(x) = 0$ с любой наперед заданной точностью.

Полезно также заметить, что не всякий алгоритмический процесс на самом деле целесообразно использовать на практике (например, для численного решения систем линейных уравнений обычно бывает неразумно использовать формулы Крамера), что большое значение для использования алгоритма при численных расчетах имеет число операций, которые надо произвести при его применении, и объем памяти, которую надо при этом использовать.

Весьма целесообразно параллельно с рассмотрением основных понятий математического анализа обучать сразу студентов численному решению задач, иллюстрирующих изучаемые понятия и их свойства. Благодатной темой для таких задач является, например, численное решение задач на отыскание экстремума функций и на решение систем линейных уравнений.

Иногда приходится слышать упреки, что в курсах математики увлекаются изучением внутренних математических понятий, ненужных для приложений. Обычно эти упреки касаются лишь стиля изложения, а не содержания курса по существу. Чтобы не давать повода для подобных упреков и для того, чтобы сразу правильно ориентировать студента при изучении математики (особенно при обучении будущих специалистов по приложениям математики), целесообразно с самого начала изучения математики в высших учебных заведениях указывать на связь с численными методами таких понятий, как например, вложение отрезков, предел последовательности, запись действительных чисел с помощью бесконечных десятичных дробей, $\varepsilon - \delta$ определения непрерывности функции (см. далее п. 5) и т. п. Такое методическое построение математических курсов обеспечивает неразрывную связь теоретических (качественных и аналитических) методов и численных, не противопоставляя одни другим.

3. О ВНУТРЕННЕЙ ЛОГИКЕ МАТЕМАТИКИ

> Среди всех наук Математика пользуется особым уважением; основанием этому служит то единственное обстоятельство, что ее положения абсолютно верны и неоспоримы, в то время как положения других наук до известной степени спорны, и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями.
>
> *А. Эйнштейн*

ПОЛОЖЕНИЕ ТРЕТЬЕ. Содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики.

Всякая наука имеет свою внутреннюю структуру и свою внутреннюю логику, имеет внутренние связущие звенья, не всегда имеющие непосредственный выход за пределы самой науки, но играющие принципиальную роль внутри нее и являющиеся необходимыми для ее понимания, усвоения и для умения правильно использовать ее в приложениях. Это бесспорная истина, о которой часто забывают, когда начинают говорить о конкретном содержании какой-либо дисциплины.

В качестве конкретного примера внутреннего связующего звена можно указать теорему Коши о среднем значении двух функций — она представляет интерес не столько сама по себе, сколько потому, что с ее помощью легко доказывается много полезных утверждений: оценка остаточного члена в формуле Тейлора, вывод правила Лопиталя для вычисления предела отношения функций.

Весьма красноречивым подтверждением сформулированного положения является высказывание А. Н. Крылова*): «При изучении анализа и механики и подобных отделов из аналитической геометрии и высшей алгебры должны соблюдаться определенная постепенность и полнота; многое может казаться излишним и непосредственных приложений не имеющим, но оно нужно для ясного усвоения дальнейшего и не может быть пропущено подобно скучной главе романа».

---

*) Крылов А. Н. Воспоминания и очерки.— М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 612.

Итак, критерий полезности для будущей специальности учащегося при составлении программы какой-либо математической дисциплины должен, безусловно, присутствовать, но ограничиться только им было бы большой ошибкой.

4. О ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

> Если ученик в школе не научился сам ничего творить, то в жизни он всегда будет только подражать, копировать, так как мало таких, которые бы, научившись копировать, умели сделать самостоятельное приложение этих сведений.
>
> *Л. Н. Толстой*

ПОЛОЖЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ. Целью при обучении математике является приобретение учащимся определенного круга знаний, умения использовать изученные математические методы, развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

Современный научный работник или инженер должен в достаточной степени хорошо владеть как классическими, так и современными методами исследования, которые могут применяться в его области. Для того чтобы иметь возможности с успехом использовать математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, иметь прежде всего необходимые для этого знания, уметь правильно обращаться с математическим аппаратом, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели. Это утверждение кажется очевидным, однако то, что происходит в реальной жизни, далеко не всегда согласуется с ним. Поясню это на одном анекдотическом, но действительно происшедшем случае.

Аспирант, пишущий диссертацию на экономическую тему, пришел однажды к одному моему ученику и сказал, что он подсчитывает процент прироста свиней в одном совхозе, однако математика дает результаты, противоречащие здравому смыслу.

— Дело,— сказал он, обстоит следующим образом. Сначала свиней в совхозе не было, а через год их стало 50. Для подсчета процента их прироста я поделил

50 на нуль и помножил на 100, сократив нули, получил $\frac{50 \cdot 100}{0} = 500\%$. Однако по здравому смыслу, если бы сначала была одна свинья, а через год их бы стало снова 50, то процент прироста должен был бы быть меньше, однако тот же подсчет дает $\frac{50 \cdot 100}{1} = 5000\%$. Что-то в вашей математике не в порядке,— сказал аспирант (интересно, конечно, как он им стал?).

Это, конечно, уникальный анекдотический случай, но, к сожалению, использование того или иного математического аппарата вне возможных границ его применения встречается и на более высоком уровне. Я помню случай с одной докторской диссертацией по механике, где для «больших» скоростей использовалась формула, выведенная лишь для достаточно малых, что привело, естественно, к неверным выводам.

Перечисленными выше задачами не исчерпываются, однако, цели, которые ставятся при обучении студентов математике. Дело в том, что для того, чтобы иметь возможность разумно и успешно применять математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно, конечно, как это отмечалось выше, иметь необходимые знания, уметь правильно обращаться с математикой, в частности, знать границы допустимого использования применяемого математического аппарата, овладеть им творчески, а не формально, в частности, уметь использовать не только готовые формулы, но и получать новые, если в них есть необходимость.

Этого, однако, недостаточно для умения решать задачи и изучать различные объекты математическими методами, да и вообще для математического творчества, т. е. для познания объективно существующих математических истин.

Недостаточно заучить ряд сведений — надо уметь математически думать. Этому трудно научить и, во всяком случае, на первом этапе обучения нелегко оценить результаты обучения в этом направлении. Математическое мышление не сводится, как это иногда кажется, лишь к логическим рассуждениям.

Для правильной постановки задачи, для оценки ее данных, для выделения существенных из них и для выбора способа ее решения необходимо обладать еще математической интуицией, фантазией и чувством гармонии, позволяющими предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен. Однако интуитивно почувствовать ожидаемый результат и наметить путь исследований с помощью правдоподобных рассуждений — это далеко не все. Интуитивное чувство гармонии является в математике лишь первой, хотя и весьма важной ступенью; интуитивные соображения и правдоподобные рассуждения отдаются на суд холодного рассудка для их изучения, доказательства или опровержения.

Следует заметить, что справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой его на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов, что не имеет для математики доказательной силы, а чисто логическим путем, по законам формальной логики. Конечно, и эксперименты и примеры также играют большую роль в математических исследованиях: они могут или дать иллюстрацию утверждения, или опровергнуть его, или натолкнуть на какую-либо (в том числе и новую) идею. За последние годы в связи с быстрым развитием вычислительной техники особенно возросло значение математического эсперимента в прикладных исследованиях: здесь открылись качественно совершенно новые возможности и перспективы.

Правильно и удачно поставленный на компьютере «численный эксперимент» может привести к возникновению плодотворных гипотез, изучение которых позволит понять сущность изучаемого явления и в конце концов создать нужную теорию.

При математическом доказательстве гипотезы, при математическом решении задачи правильный выбор аппарата и метода — залог успеха и, более того, часто причина того, что в результате будет получено больше полезной информации об изучаемом предмете, чем заранее предполагалось. Это связано с тем, что математический аппарат таит в себе много скрытой информации и скрытого богатства, накапливавшихся в нем в течение веков, благодаря чему формулы могут оказаться «умнее» применяющего их и дать больше, чем от них ожидалось (еще Фарадей говорил, что формулы умнее того, кто их создал). Иллюстрацией этой ситуации является теоретическое открытие П. Дираком позитрона при анализе уравнений, которые он изучал, стараясь выяснить, почему заряд электрона принимает только дискретные значения.

Мысль о роли математических формул особенно ярко была высказана Генрихом Герцем *): «Трудно избежать чувства, что эти математические формулы ведут независимое существование и имеют свой собственный интеллект, что они мудрее нас, мудрее даже своих создателей, что мы извлекаем из них больше, чем вначале было в них вложено».

Безусловно, приведенная схема математического мышления весьма идеализирована.

Использование знаний, математического аппарата, интуиции, чувства гармонии, фантазии, умения думать, логики, эксперимента происходит не последовательно по этапам — все это взаимодействует между собой в течение всего процесса. Далее, далеко не всегда удается довести проводимые исследования до желаемого конца, но было бы, например, большим заблуждением думать, что для математики имеют значения только доказанные утверждения, только исследования, доведенные в известном смысле до логического завершения.

Можно привести много примеров математических теорий и положений, которые, будучи сформулированы лишь в виде гипотез, тем не менее оказывали или оказывают существенное влияние на развитие математики или ее приложений.

Само собой разумеется, что сложность и иррациональность процесса мышления не означает, однако, невозможность планомерного и целеустремленного изучения и применения математики. Четкая организация и планирование всякого процесса обучения и научной деятельности на любом уровне очень полезны, так как существенно помогают их успешному проведению.

В результате приобретенных в процессе обучения математических знаний и интуиции у учащегося появляется то, что обычно называется математической культурой. Ее уровень после завершения обучения в высшем учебном заведении должен обеспечить умение разбираться в математических методах, необходимых для работы по специальности, но не изучавшихся в вузе, умение читать нужную для этого литературу, умение самостоятельно продолжать свое математическое образование.

---

*) Белл Э. Т. Творцы математики.— М.: Просвещение, 1979, с. 26.

Анализу процесса математического творчества и использования математических методов при решении задач посвящено много интересных исследований *).

5. О МЕТОДИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

> Если бы мне вновь пришлось начать свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику как науку, требующую точности и принимающую за верное только то, что вытекает как следствие из доказанного.
>
> *Г. Галилей*

Когда определена цель обучения, возникает естественный вопрос: а как ее достичь? Какова должна быть методика преподавания?

Этот вопрос как никакой другой является объектом критики как внутренней со стороны самих математиков, так и внешней со стороны специалистов, в той или иной мере использующих математические методы. Весьма часто даже внутри одной кафедры математики бывает очень трудно договориться об едином методе изложения того или иного материала (впрочем, это далеко не всегда и нужно).

Сложность ситуации и причина трудности ее устранения связана с тем, что, во всяком случае в настоящее время, методика преподавания математики еще не достигла научного уровня и основывается лишь на несистематизированном опыте отдельных преподавателей (к сожалению, многие ограничиваются лишь личным опытом) и на вере их в собственную правоту и

---

*) Отметим следующую литературу по этому вопросу:

Александров П. С. Мир ученого.— Наука и жизнь, № 8, 1974, с. 2—9.

Колмогоров А. Н. О профессии математика.— М.: Изд-во МГУ, 1960.

Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики.— М.: Сов. радио, 1970 (там же приложение: Пуанкаре А. Математическое творчество).

Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М.: ИЛ, 1957.

Пойя Д. Математическое открытие.— М.: Наука, 1970.

Литлвуд Дж. Математическая смесь.— М.: Наука, 1965.

Постников А. Г. Культура занятий математикой.— М.: Знание, 1975.

непогрешимость. Во всех методических дискуссиях особо остро проявляется непримиримость и нетерпимость к другим точкам зрения, как это всегда бывает там, где в основе лежит догма и вера. Много несерьезных вещей говорилось и говорится солидными и серьезными людьми по поводу методов обучения математике. Не будем приводить соответствующих цитат, дабы не обидеть их авторов, а постараемся сформулировать (на интуитивном уровне) некоторые основные принципы методики преподавания математики.

ПОЛОЖЕНИЕ ПЯТОЕ. Преподавание математики должно быть по возможности простым, ясным, естественным и базироваться на уровне разумной строгости.

Поскольку этот тезис каждый может понимать со своей точки зрения и вкладывать в него тот смысл, который ему хочется, то постараемся пояснить несколько детальнее, что здесь имеет в виду автор.

Тезис о простоте изложения означает, прежде всего, простоту построения курса в целом, такую его структуру, при которой делаются акценты на главные принципиальные идеи, и большая часть времени и внимания уделяется основным методам и фактам, ради которых читается данный курс. Вспомогательное и второстепенное должно явным образом занимать подчиненную роль и не требовать усилия для своего усвоения. Так, например, хотя теория вещественного числа является базисом математического анализа, в технических высших учебных заведениях нецелесообразно уделять ей много времени, так как она в этом случае является вспомогательной, а не основной частью курса математики.

Далее, при изложении какого-либо вопроса при прочих равных условиях следует отдавать предпочтение тому из способов, который проще. Конечно, появляются сразу разные «но». Поясним это на примерах. Более простым разумно считать то доказательство, которое естественно, а не искусственно. Безусловно, эти понятия относительны. По остроумному замечанию Полиа и Сеге *), способ, примененный первый раз, является искусственным приемом, он же, примененный второй раз, делается методом. Добавим еще, что, как правило, следует отдавать предпочтение прямым дока-

*) Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа.— М.: Гостехиздат, 1956.

зательствам, а не от противного, и рассуждениям, основанным на непосредственном использовании определений и известных теорем, без привлечения дополнительных конструкций. При этом разбор по существу имеющейся ситуации, анализ отдельных случаев, которые могут встретиться, хотя и бывает громоздок, но более доходчив, нагляден, легче усваивается и позволяет лучше осознать суть дела, хотя и не всегда так изящен, как искусственный прием. Наконец, предпочтительнее выбирать те методы и те доказательства, которые допускают дальнейшие обобщения, и понимать при этом, что самое главное, чтобы студент усвоил идею и метод исследования, которые лежат в основе изучаемого вопроса. Для этого его не только не следует излагать в возможной общности, а, наоборот, надо стараться разъяснить его сущность на наиболее простых примерах. Полезно помнить, что Д. Гильберт, начиная лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, выписывал на доске уравнения

$$y'' = 0$$

и

$$y'' + y = 0$$

и говорил: «Господа, на них вы можете изучить всю теорию и даже понять разницу в задачах с начальными или с краевыми условиями» *).

Впрочем, ратуя за простоту, нельзя допускать перегибов. Разумная строгость в преподавании математики, о которой говорилось выше, является антитезой не только усложненности, но и упрощенчеству.

Самыми распространенными упреками в адрес методики преподавания математики является обвинение педагогов-математиков в пренебрежении интуицией, в преподавании математики в виде формальной цепочки логических умозаключений и доказательств, проводимой с никому, кроме самих математиков, не нужной логической строгостью, приводящей лишь к торжеству «над здравым смыслом», к схоластике. Иногда высказывается прямое сомнение в необходимости проведения доказательств **) при обучении математике тех,

---

*) Рид К. Гильберт.— М.: Наука, 1977, с. 140.

**) Клайн М. Логика против педагогики: Сборник научно-методических статей по математике. Вып. 3.— М.: Высшая школа, 1973.

кто интересуется лишь ее применениями. Утверждается, что доказательства математики проводят для собственного удовольствия, и со ссылкой на авторитеты говорится, что строгие логические доказательства еще никогда и ни в чем никого не убеждали, что достаточно разъяснить студенту то или иное математическое положение на интуитивном уровне, чтобы он смог его успешно применять. Любопытно отметить, что все эти высказывания делаются обычно по поводу курса математики в высшей школе, а то, что в школьном курсе элементарной математики присутствуют леммы, теоремы и их доказательства, не вызывает таких возражений. Правда, одна из причин трудностей, которые возникли в преподавании математики в средней школе, связана как раз со злоупотреблением рецептурным методом изложения ряда фактов в школьном курсе математики.

Другое соображение, высказываемое противниками доказательств, состоит в том, что при практическом использовании математики далеко не всегда приходится пользоваться доказанными математическими фактами. Так, например, до сих пор теоретически задача Ньютона о трех телах полностью не изучена, а космические аппараты успешно летают. Говорится, что на вычислительных машинах решаются с нужной степенью точности уравнения, когда не только не удается оценить скорость сходимости применяемого вычислительного процесса, но даже и просто доказать его сходимость. Указывается на успех использования при численных решениях задач интуитивных соображений и эвристических методов.

Все это, конечно, справедливо. Безусловно, интуитивные подходы и эвристические методы целесообразны и всегда оправданы, когда они приводят к результатам, хорошо согласующимся с реальными явлениями и удовлетворяющим практическим потребностям. Изучение и развитие эвристических методов является очень важной и нужной задачей. Однако надо отдавать себе отчет в том, что использование математических методов при отсутствии четкой математической модели и ее теории обычно является вынужденной необходимостью, а не тем, что хотелось бы и что нередко нужно было бы иметь. С таким же успехом можно привести примеры задач, при решении которых численные и эвристические методы не дают нужного результата; попытки их применения порождают расходящиеся процессы, а отсутствие теории не позволяет выяснить причину этого. В результате остается даже неизвестным, как подступиться к этим задачам.

Высказывается также соображение, что поскольку сами математики отличаются друг от друга не умением проводить более или менее строго доказательства, а своей интуицией (точнее, в частности, и своей интуицией), то это также говорит о несущественности строгости доказательств, о важности интуиции и достаточности правдоподобных рассуждений (не будем придираться к логической стройности подобных умозаключений и ограничимся их восприятием на интуитивном уровне).

Пожалуй, наиболее важный и принципиальный довод противников строгих логических доказательств состоит в том, что никакое открытие в той же математике не делается строгим логическим путем, а прежде всего основывается на интуитивных соображениях, правдоподобных рассуждениях, фантазии и предвидении конечного результата из каких-либо общих или конкретных соображений.

Все это верно. Математики и сами прекрасно это понимают. Однако одним из характерных приемов критики (присущей, конечно, не только критике, направленной на существующее преподавание математики) является обвинение кого-либо в тех грехах, которых на самом деле у него нет, но которые удобно, легко и приятно критиковать. Это и относится, например, к обвинению математиков в пренебрежении интуицией. Думаю, что никто и никогда из математиков не оспаривал важности и необходимости развития математической интуиции, без которых нельзя не только сделать научного открытия, но и нельзя, как правило, решать новую практическую задачу. Никто из математиков не станет протестовать против возможности и необходимости использования физической интуиции при математическом решении задачи, особенно в случае надежности математической модели соответствующего явления.

Математик логически обосновывает свои утверждения вовсе не из-за увлеченности строгостью рассуждений, не для того, чтобы противопоставить математику другим наукам и подчеркнуть, что только в математике мы имеем дело с логически обоснованными утверждениями, а в силу объективной необходимости, в силу того, что логические рассуждения (которые по своей природе, если они правильные, являются и строгими) представляют собой метод математики, без них математика немыслима.

Тем не менее широко распространено заблуждение о том, что логическая строгость в математике нужна лишь самим математикам, а те, кто интересуются только ее практическими приложениями, могут изучить математику и научиться ее применять на интуитивном, или, как иногда говорят, на естественнонаучном уровне строгости. В качестве довода приводится пример создания дифференциального и интегрального исчисления, возникшего и успешно применявшегося на два столетия раньше, чем математики сумели его логически обосновать. На самом деле необходимость обоснования дифференциального и интегрального исчисления была обусловлена как раз сложностями, возникшими при применении математического анализа как при решении математических, так и прикладных задач, причем эти сложности были связаны с отсутствием соответствующих точных математических понятий, прежде всего понятия предела. В результате этого применение указанных методов нередко приводило к неверным результатам, объяснить появление которых было в той ситуации невозможно. В качестве простого примера можно указать на расходящиеся ряды, которые, с одной стороны, успешно применялись еще Эйлером, а с другой стороны, служили доказательством того, что из ничего можно сделать все. Именно так интерпретировал равенство

$$1 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$$

бенедиктинский монах и теолог Г. Гранди в 1703 году. После того как интуитивное понятие предела было осмыслено, причем оказалось, что в нем нет ничего сложного, изучение и применение методов математического анализа существенно упростилось, стало доступно широкому кругу людей и (конечно, при грамотном их использовании) перестало приводить к ошибочным результатам.

Как это ни странно, но многие не понимают объективной необходимости логических рассуждений, упрекая математиков в том, что они учат не той математике, которая нужна. На это можно лишь ответить, что математика не сводится к логике, но без логики нет математики. Поэтому не вполне прав М. Клайн, говоря: «Математика — это женщина, а логика — ее одежда» (см. сноску на с. 95), поскольку математика немыслима без логики. Одеждой математики скорее можно назвать внешнюю форму записи математических фактов, представляющую собой удручающе однообразную (особенно для неспециалиста) цепочку логических символов. Эти символы действительно являются лишь внешним отражением сущности математики, подобно тому как нотная грамота — отражением музыки.

Почти все математики (точнее это означает — все, за исключением конечного числа их) хорошо понимают, что чрезмерно формальное изложение математических курсов в виде безупречно логически стройной цепочки определений, лемм и теорем, без рассмотрений примеров и без приложений к решению задач может быть уподоблено (во всяком случае для будущих специалистов по приложениям математики) изучению музыки с помощью лишь одной нотной грамоты без воспроизведения музыкального звучания. Безусловно, при обучении математике надо обучать умению интуитивно предвидеть окончательный результат прежде, чем он будет получен, и умению проводить правдоподобные и эвристические рассуждения, и развивать математическую интуицию.

Поэтому важность развития математической интуиции на основе приобретаемых математических знаний в процессе обучения математике была специально подчеркнута при определении целей преподавания математики в четвертом положении.

Плодотворная и правильная интуиция вырабатывается не на пустом месте, а на основе прочных знаний. В математике же знание основано на доказательстве.

Конечно, бывают и случаи, когда при использовании математических методов не нужны правдоподобные рассуждения, а сразу можно использовать «строгие» математические методы. Такая ситуация может иметь место, когда для рассматриваемой задачи имеется вполне определенный четко разработанный алгоритм и по каким-либо причинам известно, что именно его следует применить в данном случае. Впрочем, не лишне заметить, что эти «какие-либо» причины нередко и оказываются основанными на правдоподобных рассуждениях.

Все сказанное нисколько не противоречит необходимости проведения логических доказательств. Логические доказательства помогают выработать у студента необходимые для использования математического аппарата навыки, помогают овладеть математическими методами, приобрести нужную для их грамотного применения математическую культуру, составной частью которой является логическое мышление. Часто доказательство помогает лучше осознать границы применимости рассматриваемого математического аппарата и тем самым предостеречь от возможных ошибок в его использовании.

Не следует забывать о том, что интуиция иногда и обманывает. Хорошо известен исторический пример с Лейбницем *), долго обсуждавшим вопрос о том, не является ли производная произведения функций равной произведению их производных. Вряд ли здесь найдется лучший способ выяснения истины, чем проведение прямого доказательства соответствующей формулы. Был период, когда считалось интуитивно очевидным, что всякая непрерывная функция является дифференцируемой. Выяснение действительной ситуации является не вопросом формальной строгости, а существом дела. Непрерывные недифференцируемые функции не измышление математиков, ибо, например, скачкообразные изменения скорости могут иметь место и в математических моделях реальных физических явлений. Впрочем, не нужно забывать и о том, что все зависит от точного смысла понятия производной, ибо, если производную понимать как производную обобщенной функции, то все непрерывные функции действительно дифференцируемы.

Проиллюстрируем полезность и необходимость строгого доказательства еще на одном историческом примере. Коши, рассуждая недостаточно четко, делал вывод, что всякий сходящийся ряд непрерывных функций имеет своей суммой непрерывную функцию. После приведения примера, опровергающего это утверждение,

---

*) Бурбаки Н. Функции действительного переменного. Элементарная теория.— М.: Наука, 1965, с. 190.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики.— М.: ИЛ, 1963, с. 200.

наиболее простым способом получения правильного утверждения является превращение правдоподобного рассуждения Коши в доказательство с помощью введения понятия равномерной сходимости ряда (любопытно заметить, что впервые понятие равномерной сходимости было введено английским физиком Дж. Стоксом и независимо от него немецким математиком Зейделем в 1847—1848 гг.*)).

Рассмотренные примеры хорошо показывают, что проведение доказательства позволяет убедиться в справедливости сделанного утверждения, показывают его закономерность и естественность. Этим свойством обладают все доказательства, причем тем больше, чем более они естественны, чем менее они искусственны. Однако, как это отмечалось выше, следует отдавать предпочтение прямым доказательствам перед доказательствами от противного, хотя логически они и равноправны, просто потому, что при решении практических реальных задач приходится исходить из того, что есть, а не из того, чего нет. Отметим, кстати, что все алгоритмические доказательства являются прямыми.

Другое достоинство доказательств состоит в том, что они помогают раскрыть смысл вводимых математических понятий, помогают овладеть ими и, следовательно, правильно использовать их на практике. Еще Аристотель ценил доказательства не только за то, что они устанавливают справедливость тех или иных положений, но и за то, что они проясняют сущность этих положений и раскрывают логические связи между ними. Так, например, доказательство того, что во внутренней точке экстремума производная, если она существует, равна нулю, основанное на аналитическом определении производной, помогает раскрыть его смысл, освоить его. В свою очередь доказательство теоремы Ролля, основанное на указанном свойстве точек экстремума, помогает лучше понять последнее и запомнить его и т. д. и т. п.

Из сказанного видно, что доказательства, помогая усвоить логическую структуру математического курса, установить связь между отдельными его частями, существенно облегчают его запоминание и усвоение по сравнению с рецептурным методом изложения. Важно, что

*) Бурбаки Н. Очерки по истории математики.— М.: ИЛ, 1963, с. 208, 215.

при проведении доказательств демонстрируется применение математических идей, понятий, математического аппарата в действии, т. е. происходит обучение учащегося самому важному: умению проводить решение задачи математическими методами. Не следует забывать и о том, что логическое обрамление является неотъемлемой частью процесса решения любой задачи с применением математики, в том числе и при использовании готовых алгоритмов.

Безусловно, бывают такие ситуации, когда при приобретении учащимся достаточно высокой математической культуры по тем или иным причинам оказывается более целесообразно ознакомить его с некоторым утверждением, не приводя его доказательство, а лишь разъяснив в определенной степени его смысл. Однако на первом этапе обучения это явно не желательно и не целесообразно.

Подчеркнем, что доказательство математического утверждения на основании каких-то посылок неотъемлемо содержит логический анализ связи исходных данных с рассматриваемым утверждением. Эта мысль подчеркнута Ж. Дьедонне в предисловии к его «Линейной алгебре и элементарной геометрии»: «Большое воспитательное значение для рассудка имеет поиск экономии средств и приспособление гипотез к заключениям»*). Эта сторона математики тесно связана с косвенной пользой, которую приносит ее изучение, совершенствуя общую культуру мышления, о чем говорилось в п. 2 главы I.

Само собой разумеется, что, прибегая к «строгим доказательствам», надо держаться в разумных пределах, не стремясь всегда сводить все к аксиомам, помнить, что понятие строгости является относительным и историческим. Уровень строгости должен соответствовать уровню обучаемых. Он определяется, прежде всего, уровнем подготовки учащихся, целью их обучения и потребностью практики в широком смысле этого слова. «К сожалению, иногда встречается тенденция насаждать «высокую» математику и требование математической строгости там, где они абсолютно не нужны, или вести рассуждения на «физическом» уровне математической строгости в вопросах, не имеющих отношения

*) Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия.— М.: Наука, 1972, с. 18.

к физике»,— пишут А. А. Арсеньев и А. А. Самарский *). Нельзя строгость превращать и в формализм, не разъясняющий, а затемняющий суть дела.

Так, например, при определении непрерывной функции как такой функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги или мела от доски (это дает определенную информацию о рассматриваемом объекте), тот факт, что всякая непрерывная функция, принимающая значения разного знака на концах отрезка, в некоторой его точке обращается в нуль, по-видимому, не следует доказывать считая, что он непосредственно наглядным образом вытекает из определения. При классическом же определении непрерывной функции тот же факт следует доказать на «общепринятом» уровне строгости. Кавычки здесь поставлены потому, что, если к допустимым логическим рассуждениям подойти в определенном смысле более строго, а точнее, с позиций конструктивной математики, то для высказанного утверждения можно будет построить противоречащий пример, т. е. построить функцию, непрерывную на отрезке, принимающую на его концах значения разного знака и ни в одной его точке не обращающуюся в нуль. Этот неожиданный результат объясняется тем, что, образно говоря, в конструктивной математике другие «правила игры», чем в классической.

К сожалению, и это, по-видимому, неизбежно, даже внутри одного математического курса отдельные его части приходится излагать на разном уровне строгости. Так, в начале анализа понятие производной, признаки экстремума, свойства непрерывных и дифференцируемых функций вполне можно излагать на уровне «классической строгости», заботиться о том, чтобы в формулировках доказываемых теорем не было лишних предпосылок, и подтверждать это соответствующим анализом. При переходе к функциям многих переменных ситуация резко меняется. Ввиду сложности рассматриваемых объектов здесь не всегда разумно доказывать теоремы при минимальных предположениях — загрубление предпосылок часто существенно упрощает доказательство и проясняет суть дела. Например, теорему о неявных функциях значительно проще, а потому и целесообразнее, доказывать для непрерывно диф-

*) Арсеньев А. А., Самарский А. А. Что такое математическая физика.— М.: Знание, 1983, с. 62.

ференцируемых, а не просто дифференцируемых функций.

Меняется, обычно при рассмотрении функций многих переменных, и уровень строгости проводимых рассуждений. Для функций одной переменной доказательства теорем общего курса анализа можно без труда проводить по четким логическим схемам, прибегая к наглядным представлениям лишь для их иллюстрации. Для функций же многих переменных наглядные представления являются иногда основой рассмотрения, как, например, понятие ориентации поверхности по «правилу штопора» при изучении теории поля (логически строгое изложение этого вопроса потребовало бы слишком много времени и усилий, неоправданных в высшем техническом или другом подобном высшем учебном заведении). Это неизбежно, не следует этого бояться и стремиться к обязательному построению всего курса математики на уровне логической строгости изложения начал анализа. Хорошо и то, что эти начала так удается изложить, а чтобы удержаться на таком уровне в течение всего курса, прежде всего, не хватит часов, отводимых на математику, да, кроме того, это часто и нецелесообразно даже при наличии времени.

При построении математического курса нельзя ограничиться заботой только о его внутренней логической стройности, сведя его, пусть даже к безупречной, формальной логической последовательности определений, лемм, теорем и их доказательств. В. П. Ермаков говорил по этому поводу: «Стремясь к простоте и краткости изложения, не следует при этом упускать из виду ясности изложения» *). Необходимо уделять достаточно большое внимание разъяснению понятий, в том числе и на интуитивном уровне, рассмотрению иллюстрирующих примеров, демонстрации применения изучаемых методов на решении частных задач и всевозможным «лирическим отступлениям». Надо всегда помнить, что когда мы учим математике студентов, которые в силу своей природной склонности избрали своей будущей специальностью не математику, то следует особенно тщательно отбирать лишь тот материал, который поле-

*) Ермаков В. П. Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка со многими переменными и канонические уравнения.— Унив. изв., 1884, 1, 3, с. 1.

зеп для них, который им доступен и который может быть ими усвоен за тот промежуток времени, который на это отводится, наконец, тот, на котором можно воспитать у них нужную им математическую культуру, о коей говорилось при обсуждении целей преподавания математики (см. п. 4 этой главы).

Несмотря на кажущуюся очевидность сказанного выше в защиту целесообразности использования при изучении математики строгих логических рассуждений, в частности, четких логических доказательств формулируемых утверждений, далеко не все согласны с этим. Существует мнение, что для потребителей математики не является необходимым знакомство со строгими определениями математических понятий, что целесообразно вводить их «наглядно», ограничиваясь лишь интуитивным уровнем. Это совсем не простой вопрос. Когда мы хотим познакомить ребенка с понятием «стул», то, конечно, самое разумное не давать ему логического определения этого понятия, а просто показать стул. Однако когда заказывается изготовление стула мастеру, то для того, чтобы изготовленный стул совпал с желанием заказчика, приходится составлять достаточно детальное его описание. Подобно этому обстоит дело и с математическими понятиями. В тех вопросах, где математический язык применяется лишь для описания явления (как, например, термин «график» при графическом изображении работы сердца на кардиограмме), о математических понятиях можно говорить любую чепуху либо ничего не говорить — это не имеет никакого значения и не может повлиять на дальнейшее. Так, врач-кардиолог, использующий кардиограмму для изучения сердца больного, не имеет нужды знакомиться с понятием функции, ибо знакомство с этим понятием не даст ему больше полезной информации о состоянии сердца пациента.

В тех же случаях, когда употребленное абстрактное понятие приходится использовать по существу, наглядное представление о нем может лишь предварить его четкое определение, но не заменить его.

Другой пример. Если дельта-функция Дирака употребляется лишь для описания некоторого физического понятия, скажем мгновенной силы, то ничего не случится, если сказать, что дельта-функция — это обычная функция, равная нулю во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, причем интеграл от этой функции равен единице. Все это, конечно, непонятно с точки зрения математики, в частности, здесь неприменимо понятие обычного интеграла, определяемого как предел интегральных сумм, или более общего понятия несобственного интеграла. Однако поскольку здесь дельта-функция является просто «математическим описанием» мгновенной силы, то все сказанные слова, несмотря на отсутствие в них математического смысла, не приводят к недоразумению. Если же с понятием дельта-функции придется работать, применять его в теоретических исследованиях, то подобное представление о дельта-функции может привести к появлению ошибок, и потому целесообразнее добавить пару дополнительных фраз, проясняющих суть дела (которые физики, как это ни странно, очень не любят говорить). Например, сказать, что мгновенная сила — это идеализация реального явления, что в действительности действует некоторая дельта-эпсилон сила в течение промежутка времени длительности эпсилон. Если эта сила сообщает то же количество движения (для определенности равное единице), что и рассматриваемая «мгновенная» сила, то по определению полагается, что интеграл от мгновенной силы, т. е. от дельта-функции, равен пределу обычных интегралов от «размазанных» дельта-эпсилон сил, когда эпсилон стремится к нулю. После этого все делается ясным и понятным. Конечно, в зависимости от дальнейшего использования понятия дельта-функции может потребоваться и более полное описание ее свойств и связей с другими математическими объектами вплоть до современной теории обобщенных функций.

Там, где математика применяется как метод исследования, интуитивных представлений об основных понятиях обычно оказывается недостаточно. Более того, и это очень важно, использование математических понятий без точного понимания их смысла, а, как говорят, на интуитивном уровне, может привести к прямым ошибкам. Об этом уже говорилось при обсуждении четвертого положения. Следует всегда помнить, что когда математика применяется в качестве аппарата, в качестве инструмента исследования, то для успешного проведения последнего необходимо, как правило, четкое представление об используемых при этом математических понятиях. Важно подчеркнуть, что это представление не зависит от «места действия» — оно одно и то же как в университете, так и в техническом высшем учебном заведении. Автору приходилось слышать, что во втузах более просто излагают формулу конечных приращений Лагранжа, используя соответствующий чертеж, а в университете поступают хуже, проводя все рассуждения чисто аналитически. Такое противопоставление неправильно. Тот, кто изучает формулу Лагранжа, должен, конечно, понимать как смысл ее аналитического выражения, так и геометрическую интерпретацию последнего. Понимать одно и не понимать другое значит не понимать вовсе.

Только при наличии указанных четких представлений об используемых математических понятиях может быть объективная уверенность в правильности сделанных выводов. Для того чтобы применять математику как метод исследования, весьма важно осознать и хорошо освоить сущность и взаимосвязь ее основных идей и понятий. В этом случае можно смело использовать правдоподобные рассуждения, ибо они надежны только, если базируются на истинном знании. Строить же все обучение математики на правдоподобных рассуждениях заведомо недопустимо, поскольку в этом случае невозможно даже четко (а значит, правильно) очертить границы допустимого применения рассматриваемого математического аппарата.

Свободное владение математическими методами, знания и интуиция приобретаются, накапливаются и развиваются в процессе длительной и настойчивой работы. Тот, кто последовательно овладевает математикой, кто последовательно получает твердые и точные знания математических фактов, будет уверенно двигаться дальше, и математика станет послушным инструментом в его руках.

Часто мнение о трудности изучения математики связано с туманным и нечетким ее изложением на интуитивном уровне. Кажущаяся трудность тех или иных математических методов нередко обусловлена тем, что эти методы не были своевременно достаточно хорошо разъяснены и потому остались непонятными. Четкое введение математического понятия по сравнению с введением его на интуитивном уровне, как правило, оправдывает себя при его применении, позволяет его правильно использовать и не нуждается в дополнительных пояснениях. Полезно отдать себе отчет и в том, что развитие правильной математической интуиции у учащегося происходит, прежде всего, на базе твердых математических знаний, на базе владения математическими методами. Поэтому, само собой разумеется, что если говорить студенту бессмысленные или неверные вещи, что часто делается при попытке обучать математике на интуитивном уровне, то это приведет к выработке у него неправильной интуиции, вредность чего очевидна.

Подведем некоторые итоги. Прежде всего, из сказанного выше с достаточной определенностью явствует, что вообще неправильно говорить о строгих и нестрогих математических рассуждениях, о строгой и нестрогой математике. Есть только одна математика. Она является строгой по своей сущности, базируется на математически обоснованных рассуждениях (конечно, в это понятие математики разных школ вкладывают разный смысл, но мы здесь не будем касаться этого вопроса), и существует только обоснованное или необоснованное использование математики.

Наряду с математически обоснованными, логически завершенными рассуждениями встречаются математически правдоподобные рассуждения. В них употребляются не только математические понятия и методы, они основываются также на фантазии, интуиции, опыте, знании реальных явлений, логике, но не имеют законченной логической формы, в этом и состоит их сила и слабость, гибкость и односторонность, широта и ограниченность их применения.

Было бы заблуждением считать, что подобные применения математических методов не нужны и вредны. Это, безусловно, не так. Искусство правдоподобных математических рассуждений очень важно и нужно. Им пользуются при поисках истины как математики, так и нематематики. Отличие состоит лишь в том, что математик, получив результат с помощью правдоподобных рассуждений, для того, чтобы убедиться в его справедливости, должен найти для него строгое, т. е. математически обоснованное, доказательство. Нематематик же, точнее практик, изучающий реальную задачу, найдя ее решение с помощью правдоподобных рассуждений, не нуждается в том, чтобы получить тот же результат на основе математически обоснованных рассуждений, он должен прежде всего проверить (прямо или косвенно), соответствует ли полученный им результат действительному положению вещей, позволяет ли он объяснять соответствующие уже известные факты и предсказать новые. До такой практической проверки, подтверждающей правильность результата, полученного правдоподобными рассуждениями, он остается только гипотезой.

Предпринимаемые нередко попытки превратить правдоподобные рассуждения в математически обоснованные оказываются отнюдь не ненужными и не бесполезными, так как они позволяют иногда вскрыть более глубокие связи, а иногда, оказавшись бесполезными для рассматриваемого реального явления, оказываются полезными для развития самой математики.

Во многих дискуссиях по вопросу о том, допустимы ли нестрогие математические рассуждения или нет, забывалось о том, для чего проводятся эти рассуждения. Если автор этих рассуждений претендует на то, что им получен новый математический результат, то он должен уметь превратить свои правдоподобные рассуждения в математические. Если же автор получил указанным путем ответ на вопрос, связанный с реальным явлением, и правильность ответа подтвердилась практической проверкой, то полезность и допустимость проведенных им правдоподобных рассуждений очевидны. Только ему не следует претендовать на то, что его достоверные соображения и эвристические рассуждения имеют доказательную силу, если он не хочет или не может превратить их в математически обоснованные. По существу же дела в этом нет никакой необходимости — практическая проверка правильности полученного результата говорит сама за себя, и именно она является доказательством его справедливости, а вовсе не те соображения, которые привели автора к нему.

Отметим, что с помощью правдоподобных математических рассуждений можно получить решение не только частной конкретной, практически важной задачи, но и даже сделать открытие. Однако и в этом случае его доказательством будут являться не приведшие к нему нестрогие математические соображения, а реальная действительность, которой должно соответствовать с нужной точностью сделанное открытие.

Однако математическая строгость отнюдь не является ненужной роскошью в прикладной математике — это насущная необходимость. То же обстоятельство, что с помощью необоснованных математических рассуждений можно получать правильные и полезные практические результаты, показывает вовсе не то, что строгие математические рассуждения при решении практических задач не нужны (это действительно часто бывает так), а то, что от проводимых в подобных случаях рассуждений не нужно и требовать, чтобы они являлись математическим доказательством полученных результатов, так как таким доказательством здесь является эксперимент в широком смысле этого слова.

Не нужно забывать и о том, что при помощи правдоподобных рассуждений с тем же успехом можно получить и результаты, весьма далекие от реальной действительности. О них, конечно, говорят гораздо меньше просто потому, что они, как никому не нужные, быстро забываются.

В качестве примеров можно привести господствовавшее многие века убеждение античных ученых, считавших, что тяжелые тела падают быстрее легких и что движение прекращается, когда перестает действовать вызывающая его сила. Первое было опровергнуто опытами Галилея, второе заменилось законом инерции Ньютона. (Небезынтересно подчеркнуть, что в те же античные времена была создана логически обоснованная геометрия Евклида и доказанные в ней теоремы были, есть и будут всегда истинными!) Долгое время считавшееся непреложным представление о том, что увеличение скорости течения жидкости сопровождается увеличением ее давления, было опровергнуто Даниилом Бернулли, сформулировавшим закон движения жидкости, получивший его имя. Даже выдающийся физик Резерфорд уже в нашем веке отстаивал мысль о невозможности когда-либо использовать атомную энергию. Следует заметить, что все эти и многие другие заблуждения, несмотря на свою ложность, подтверждались правдоподобными рассуждениями.

Итак, из всего сказанного следует, что не имеет смысла высказывать недоверие и подвергать сомнению результаты, относящиеся к реальным явлениям и полученные с помощью правдоподобных математических рассуждений, основанных на интуитивных соображениях, из-за их необоснованности, если они соответствуют реальным фактам. Но тогда возникает естественный вопрос: если при решении прикладных задач от применяемых при их решении «математических методов» не требуется их обоснования, так как критерием правильности полученного результата является лишь его соответствие реальной действительности, если эти методы используются лишь как некоторые наводящие соображения, лишь как правдоподобные рассуждения, а не как доказательства сделанных выводов, то, может быть, следует учить студентов не математике, а только правдоподобным математическим рассуждениям?

С большой осторожностью относясь ко всяким категорическим высказываниям по подобным вопросам, автор не собирается утверждать, что это принципиально невозможно. Однако трудностей при осуществлении такой попытки возникнет предостаточно. Дело в том, что в силу своей логической необоснованности эвристические соображения и правдоподобные утверждения не являются (в отличие от математически обоснованных положений) абсолютной истиной. Они имеют весьма субъективный характер, сильно зависят от индивидуальности стиля мышления, могут казаться весьма убедительными одному лицу и совершенно неприемлемыми для другого. Всякому автору открытия наиболее убедительными доводами правильности этого открытия обычно кажутся те правдоподобные рассуждения, которые привели его к цели. Однако, когда результат уже известен, нередко удается найти для него более простое, а часто поэтому более глубокое и принципиально более интересное объяснение, вскрыть его связи с уже известными фактами и тем самым лучше понять его сущность.

Представляется невозможным успешно научить пользоваться правдоподобными математическими рассуждениями, не научив самой математике. Во всяком случае, мне известны случаи, когда бы подобные попытки приводили к успешному результату, т. е. случаи, когда бы обучение было построено на правдоподобных математических рассуждениях, и в результате обученные таким методом могли бы целесообразно использовать полученные знания для решения прикладных задач и тем самым была бы достигнута реальная польза. Более того, имеющиеся попытки изложения математики на интуитивно правдоподобном уровне обычно проигрывают перед логически последовательным ее изложением в силу громоздкости, расплывчатости мысли, неизбежно появляющегося многословия, не связанного с существом дела. Такое изложение трудно для восприятия еще и потому, что оно основано не на объективных математических истинах, а на субъективноинтуитивном восприятии того или иного математического понятия тем или иным лицом.

По поводу роли логики и интуиции в математике кратко и выразительно высказался А. Пуанкаре: «...логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства» *).

В заключение обсуждения необходимости и полезности строгости в математике приведу еще одну цитату, а именно высказывание Д. Гильберта по этому вопросу: «Будет большой ошибкой думать при этом, что строгость в доказательстве есть враг простоты. Наоборот, многочисленные примеры убеждают нас в том, что строгие методы являются в то же время простейшими и наиболее доступными. Именно стремление к строгости и заставляет нас искать простейшие доказательства. Это же стремление часто прокладывает путь к методам, которые оказываются более плодотворными, чем старые, менее строгие методы»**).

Возвращаясь к вопросу критики методики преподавания математики, следует заметить, что нападки со стороны на якобы неправильную методику преподавания математики нередко связаны с непониманием или нежеланием понять суть дела. Так, например, одно из самых распространенных обвинений в адрес математиков состоит в том, что они обучают студентов никому не нужному эпсилон-дельта-языку, в частности, требуют от них знания определения непрерывности функции с помощью эпсилон и дельта, заставляют их проводить на этом языке какие-то искусственные доказательства, скажем, доказывать, используя эпсилон-дельта-терминологию, что x^3 является непрерывной функцией, хотя это сразу следует из того, что функция $f(x)=x$ очевидным образом непрерывна, а произведение непрерывных функций также непрерывно.

Этот упрек основан на явном недоразумении и нежелании по существу разобраться в вопросе. Ведь определение непрерывности функции на эпсилон-дельта-языке просто говорит о том, с какой точностью надо задавать значения аргумента функции для того, чтобы получить значения самой функции с заданной точ-

*) Пуанкаре А. О науке.— М.: Наука, 1983, с. 167.
**) Рид К. Гильберт.— М.: Наука, 1977, с. 104.

ностью — необходимость понимания этого не вызывает сомнений ни у какого прикладника. Сформулированную выше задачу о непрерывности x^3, конечно, целесообразнее перефразировать следующим образом: выяснить, с какой степенью точности достаточно задать значение аргумента рассматриваемой функции, чтобы получить ее значение в данной точке с заданной степенью точности. В такой постановке решение задачи не вытекает из теоремы о непрерывности степенной функции и потому приобретает дополнительный интерес. Полезность решения подобных задач очевидна.

На этом примере еще раз хорошо видно, что математиков часто обвиняют в грехах, которые им не свойственны. Мне хочется констатировать, что, несмотря на бытующее мнение, математики не схоласты, они прекрасно понимают, что применение математики не сводится к логическим упражнениям, они хорошо отдают себе отчет в необходимости развития интуитивного мышления, но при этом отчетливо сознают, что на первом месте стоит знание. Математики, безусловно, достаточно правильно воспринимают и принимают к сведению разумную критику со стороны. Следует, однако, подчеркнуть, что методика преподавания математики это прежде всего дело самих математиков при условии, конечно, что студенты получают необходимый запас математических знаний. Если же последнее условие не выполняется, то причина этого лежит, возможно, просто в недостаточной квалификации преподавателей математики.

В самом деле, необходимым условием хорошей постановки всякого учебного процесса является прежде всего достаточно высокая квалификация тех, кто учит.

При этом не следует забывать, что вследствие постоянного прогресса науки понятие о высокой квалификации подвергается временно́му изменению, поэтому надо обращать постоянное внимание на поддержание квалификации преподавателей на надлежащем уровне и принимать своевременные меры по его повышению.

Снижение профессионального уровня и появление дилетантизма среди преподавателей опасны тем, что лавинообразно приводят к выпуску специалистов, имеющих те же недостатки. Часто забывают и о том, что далеко не всякий хороший в своей области математик (хороший в том смысле, что он достиг успеха в своей научной деятельности) является и хорошим преподавателем (даже в сфере своей узкой специальности). Оставляя в стороне искусство учить, которое обсуждалось в первой главе, заметим лишь, что большого успеха в математике можно добиться в сравнительно узкой области и с небольшим запасом знаний, а для того, чтобы быть хорошим педагогом, надо быть, в частности, хорошо эрудированным в математике в целом. Впрочем, вопросу общей эрудиции следует уделять больше внимания при подготовке не только преподавателей, но и научных работников (чтобы они действительно были учеными и не занимались открытием давно уже известных вещей).

В свете всего сказанного представляется, что в настоящее время решение вопроса о повышении квалификации преподавателей математики и специальной их подготовки является весьма актуальным и важным.

Так как же все-таки преодолеть перечисленные выше трудности при обучении математике? Как же должна быть построена методика, чтобы преподавание математики было действительно таким, как это было сформулировано в пятом положении?

К сожалению, не существует точных рецептов, как надо преподавать различные разделы математики. Методика преподавания математики не наука, а искусство.

Правда, это вовсе не означает, что методике преподавания математики не надо учить. Всякому искусству можно и должно учить: учатся и художники, и музыканты, и артисты, и писатели. Более того, можно привести немало примеров, когда искусство в результате правильно поставленного обучения превращалось в ремесло. Произойдет ли это когда-либо с искусством учить, трудно сказать, но попытаться научиться преподавать надо каждому, кто хочет серьезно заняться этой деятельностью.

Перед разработкой методики и выработкой достаточно обоснованных рекомендаций стоят большие сложности. Ведь подобные рекомендации и принципы, лежащие в их основе, недоказуемы, а основаны на вере. Поэтому, даже если какие-то из них удалось сформулировать, оказывается трудным убедить кого-нибудь в их целесообразности. Большинству, кроме всего прочего, свойственно считать, что так, как они сами учились (у кого-нибудь или самостоятельно), так лучше всего учить и других (забывая о том, что часто с тех пор, когда они учились сами, прошло 40—50 лет), что то, что понравилось им в свое время или хорошо было освоено, является самым важным и нужным и теперь. Часто то, что преподаватель сам не учил совсем или учил в зрелом возрасте, кажется ему сложным, изысканным и трудным, а потому и ненужным при общем образовании.

Вспоминаю, что один пожилой математик выражал мне удивление по поводу изучения тензоров студентами первого курса, считая, что это для них недоступно. Он ссылался на то, что он и его коллеги-математики привыкали к этому понятию всю жизнь. Его убежденность легко объяснима: когда он учился в университете, его в аналитической геометрии обучали только координатному методу, в зрелом возрасте он освоил векторный метод, в солидном столкнулся с тензорным. Поэтому неудивительно, что последний вызывает у него такое почтение.

Подобное отношение наблюдается в настоящее время и к теории обобщенных функций.

Людям вообще свойственно многое забывать, в частности забывать, как они сами учились. Усвоив когда-то в детстве или юности какое-либо понятие и привыкнув к нему за тридцать, а то и пятьдесят лет, человек совершенно искренне полагает, что это понятие настолько очевидно, что не стоит попусту тратить время на его логическое обоснование и доказательства его свойств, а достаточно просто ввести это понятие в явочном порядке, не анализируя его. Так, например, мне приходилось слышать высказывание о том, что незачем специально изучать представления групп, так как это совершенно очевидная вещь, и там, где она оказывается нужна, всегда бывает нетрудно объяснить все, что необходимо для рассматриваемого случая. Что уж тогда говорить в этом аспекте о таких понятиях, как предел функции!

Как уже отмечалось, обучающему обычно кажется, что как нечто понято и усвоено им самим, так оно должно пониматься и усваиваться учащимися, а ведь индивидуальные способности и стили мышления у людей весьма различны. К этому мы вернемся еще ниже при рассмотрении положения восьмого, а пока лишь констатируем, что трудностей в методике преподавания математики более чем достаточно.

Добавим к сказанному, что методика существенно зависит от формы преподавания: методика чтения лекций отличается от методики написания учебника; методика чтения лекций перед аудиторией другая, чем методика чтения лекций по телевидению; зависит методика чтения лекций перед аудиторией и от числа слушателей (большая разница, как читать лекцию, если слушателей пять или двести), и от уровня их подготовки, и от многих других причин.

Что касается учебников, то, конечно, на первом месте при оценке их качества стоит их научное содержание, методическая продуманность, ясность и простота языка. Создание хорошего учебника является очень трудным делом. Совсем не просто выбрать нужный уровень общности описания рассматриваемых объектов. Случается, что в погоне за общностью изложение усложняется настолько, что затемняет основную идею, которую прежде всего должен усвоить читатель. Как правило, при доказательстве какой-либо теоремы для лучшего выделения идеи, лежащей в его основе, целесообразно усилить в разумных пределах предпосылки с тем, чтобы доказательство было по возможности не обременено побочными трудностями (хотя, быть может, и связанными с другими интересными идеями, полезными для каких-то целей, которые, однако, в данном случае не преследуются).

Не надо забывать и о том, что многие вопросы, вызывающие затруднение на одной ступени обучения, делаются простыми и легко понятными на более высокой. Так, например, при изучении интеграла Римана формулу интегрирования по частям целесообразно излагать для гладких или, по крайней мере, для кусочно гладких функций, а не для функций, имеющих интегрируемые по Риману производные, так как последнее без всяких затруднений будет получаться из теории интеграла Лебега.

Важно в учебнике суметь расставить нужные акценты, написать не простое перечисление фактов, а помочь читателю выделить принципиальное, отделить главное от второстепенного, не впадая при этом в многословие. Это сделать сложнее, чем на лекции. Рассказывают, что, когда А. Я. Хинчин доходил в курсе анализа до теоремы о существовании первообразной у непрерывной функции и формулы Ньютона — Лейбница, он всегда начинал изложение этих вопросов в начале двухчасовой лекции и заканчивал его к концу первого часа. После этого он говорил слушателям, что у них сегодня большой праздник — они познакомились с одной из жемчужин математической мысли, с основной теоремой дифференциального и интегрального исчисления, что он хочет, чтобы у них этот день остался в памяти на всю жизнь, что он не может после доказательства этой замечательной теоремы говорить о менее значительных вещах, и потому продолжения лекции не будет, все могут идти домой.

У автора учебника возможности для того, чтобы помочь читателю понять и почувствовать глубину и значительность той или иной теоремы, значительно меньше, чем у лектора: автор имеет в своем распоряжении лишь несколько фраз.

Очень важен стиль написания. Чрезмерная формализация или, как говорил Дж. Литлвуд, стиль «вдохновленный, несомненно, дьяволом», так же как и его противоположность — «описательный» стиль, затрудняют изучение учебника. Изложение в учебнике должно быть кратким, наглядным, логически четким, но не сухим. Учебник должен содержать не только перечисление соответствующих фактов (определений, лемм, теорем, их доказательств, разбор примеров), но и необходимые краткие, и притом точные их разъяснения.

Нецелесообразно, когда читателю учебника приходится размышлять над тем, что думал автор, когда делал переход от одного утверждения к другому. Подобная ситуация случается при наличии пропусков «тривиальных соображений», поэтому лучше не делать подобных сокращений. По словам того же Литлвуда: «две пропущенные тривиальности могут в совокупности образовать непреодолимое препятствие» *). Ссылки на пользу размышления учащихся при обучении, поскольку такое размышление способствует активному усвоению изучаемого материала, здесь не уместны — для таких размышлений имеются упражнения и задачи, текст же учебника должен иметь логически завершенный вид.

Краткость учебника далеко не всегда является его достоинством. К сожалению, последнее время появляется все больше учебников по математике, объем кото-

---

*) Литлвуд Дж. Математическая смесь.— М.: 1965, с. 33.

рых меньше традиционного и которые во многом, в силу этого обстоятельства, вызывают у изучающих их студентов излишние затруднения. Очень часто в подобных учебниках встречаются фразы вроде «это следует из...» и гораздо реже объясняется, как именно «это следует из...». К счастью, не так часто, но встречаются утверждения вообще безо всяких комментариев. Просматривая такие учебники, с чувством тоски вспоминается еще совсем недавнее «старое доброе время», когда авторы учебников писали все, что они думали, а студенты не были вынуждены, нервничая в предэкзаменационный период, восстанавливать пропущенные в книге места, в частности пропущенные детали доказательств, а имели значительно большую возможность тратить время на осмысливание и анализ понятий, на установление логических взаимосвязей между ними.

Автор учебника должен не просто последовательно излагать факты, а умело вести за собой читателя по увлекательной дороге познания, руководить им, разъяснять ему смысл и значение возникающих понятий и доказываемых теорем, иллюстрировать на примерах применения излагаемых теорий.

К сожалению, иногда пренебрегают и внешним оформлением учебников и тем самым во многом сводят на нет другие их достоинства. Печать в учебнике должна быть четкая, оформление спокойное, текст должен легко читаться; расположение формул должно подсказываться удобством чтения; каждая новая мысль должна начинаться с красной строки; основные утверждения должны формулироваться по возможности лаконично (но не в ущерб русскому языку) и сразу бросаться в глаза: увидел и запомнил на всю жизнь. Умело подобранные чертежи и рисунки часто существенно помогают пониманию и усвоению материала учебника.

Наличие больших трудностей в выборе методики преподавания в высших учебных заведениях связано также с тем обстоятельством, что вопросу подготовки преподавателей для высшей школы на профессиональном уровне уделяется явно недостаточное внимание. В то время как для подготовки учителей для средней школы имеется много различных учебных заведений разного уровня, для подготовки преподавателей высшей школы в учебных планах вузов не отводится времени. Дело усугубляется еще тем, что литературы по методике преподавания математики явно недостаточно.

Все, сказанное при разъяснении седьмого положения, красноречиво говорит о трудностях преподавания математики и о невозможности формулирования здесь точных принципов, которыми следует руководствоваться. В результате нам не удалось далеко уйти от того, что было сказано в начале, т. е. того, что изложение математики должно быть по возможности простым, ясным, естественным и основываться на разумной строгости, не очень вдаваясь в подробности, что это означает.

6. О ТОМ, ЧЕМУ НАДО УЧИТЬ В МАТЕМАТИКЕ

Знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

Гельвеций

ПОЛОЖЕНИЕ ШЕСТОЕ. Учить надо тому, что нужно и чему трудно научиться.

Это положение означает, в частности, что при обучении надо отобрать основные принципиальные вопросы (и это должно быть хорошо отражено в программах), которым и следует обучать в первую очередь, на которых и следует сосредоточивать основное внимание. Ничего кроме излишних трудностей при освоении материала не может принести перегрузка его мелкими, малозначительными, хотя, быть может, временами и любопытными фактами.

Например, в результате первого знакомства с математическим анализом студент должен научиться обращаться с функциями, заданными формулами, научиться видеть их поведение в точках, на промежутках, должен научиться выделять их главную часть, отбрасывать не существенные в рассматриваемом вопросе добавки, т. е. овладеть формулой Тейлора — все это основа математического анализа. Если студент овладеет этим, то он будет уметь и вычислять пределы, и находить асимптоты, и строить графики, и исследовать сходимость и ее скорость у рядов и интегралов, и вычислять приближенно интегралы, значения функций, суммы рядов и т. д. и т. п. Нередко вместо этого основного метода, вместо основного инструмента исследования функций — формулы Тейлора, в курсе математического анализа изучаются, и притом частично без доказательств, цепочки теорем, которые студент, заучивая на интуитивном уровне, путает их затем на экзаменах и бывает не в состоянии использовать в своей дальнейшей практической деятельности. К сожалению, это часто связано с тем, что формула Тейлора занимает в учебниках и программах положение бедного родственника. Мне представляется, что здесь, по существу, делается не тот акцент, который следовало бы: основа заменяется надстройкой.

Случается, что в процессе преподавания уделяется незаслуженно много времени хотя и нужным, но простым вещам. Поясним это сначала на не математическом примере. Когда после окончания школы человек поступает на работу, то выясняется, что нередко он не имеет даже представления о том, как написать заявление о приеме на работу и автобиографию. В связи с этим в печати высказывались предложения о том, что неплохо было бы в средней школе ввести предмет «канцеляроведение». Безусловно, то, что оканчивающий школу не знает, как написать заявление и автобиографию, очень плохо, но вводить ради этого предмет канцеляроведения более чем неразумно — этому можно научить между делом.

С подобной ситуацией мы часто встречаемся и при преподавании математики. Высказывается, например, категорическое мнение о том, что при вычислении определенного интеграла выражение, содержащее обратные тригонометрические функции и радикалы, не является ответом для инженера, поэтому при решении подобных задач ответ всегда надо доводить до числа, записанного десятичной дробью. В связи с этим высказывается рекомендация обращать особое внимание в процессе преподавания математики на запись в виде десятичных дробей окончательного результата, полученного при решении задачи. Посылка здесь также верна (инженеру нужен ответ в виде десятичной дроби), вывод же вызывает возражение. Пользоваться таблицами учат детей еще в школе. Конечно, возмутительно, если студент высшего технического учебного заведения не может по таблице найти значение арктангенса или произвести с помощью миникалькулятора нужные действия, но надо отдавать себе отчет в том, что не этим надо заниматься во втузе, изучая математику. Безусловно, студент должен уметь это делать, а если, паче чаяния, не умеет, то между прочим его надо научить и этому, не делая из этого события и не считая это целью обучения по математике во втузе.

Попутно заметим, что при обучении студента численному решению задач и воспитании у него уважения к числовому ответу решения следует значительно шире, чем это делается, использовать численное решение практических задач на смежных кафедрах, особенно таких задач, в которых величина числового ответа имеет принципиальное значение для изучения рассматриваемого явления (например, получится дозвуковая скорость или сверхзвуковая).

Новые сложности в вопросе «чему учить» появились в последние десятилетия в связи с бурным развитием быстродействующей вычислительной техники. Для того чтобы уметь правильно ее использовать, а без этого немыслима работа большинства современных специалистов (научных работников, конструкторов, инженеров и т. д.), надо хорошо знать не только элементы программирования и уметь обращаться с программами для ЭВМ, как раньше школьник умел обращаться с тригонометрическими таблицами, не только уметь использовать компьютеры (в том числе и миникомпьютеры), как раньше студент использовал логарифмическую линейку, но и понимать, что значит математически грамотное описание задачи, как надо корректно поставить математическую проблему, как правильно подойти к ее решению, какие существуют методы ее численного решения, какой из них целесообразнее выбрать в данном случае, какие качественные исследования возможно и полезно провести при заданных условиях, не прибегая к помощи компьютеров. Все это в зависимости от рассматриваемой задачи требует более или менее серьезных математических знаний и, значит, соответствующего в определенном смысле серьезного классического математического образования.

На первых этапах обучения общению с вычислительной машиной и ее использованию для решения задач необходимо возникает потребность в знакомстве с элементами теории множеств и математической логики. К сожалению, иногда это принимается за самоцель, а все дальнейшее вышеуказанное математическое образование считается излишним (при этом случается, что изучение элементов математической логики и конечной математики проводится иногда на элементарном наукообразном уровне или, наоборот, принимает излишне гипертрофированные размеры). Подготовка таким методом специалистов является большим злом.

Отдавая себе отчет в том, что отдельный пример не является доказательством, все же приведу один случай, который однажды произошел с Л. А. Люстерником и который он любезно разрешил здесь рассказать.

Несколько лет назад он был приглашен консультантом в один институт, и первая задача, с которой он столкнулся, состояла в табулировании значений одного трехкратного интеграла (если мне не изменяет память) от функции, зависящей еще от нескольких параметров. Были уже составлены программы для вычисления соответствующих таблиц, осуществление счета по которым должно было занять около полугода работы на ЭВМ типа «Стрела».

Л. А. Люстернику показалось, что рассматриваемый интеграл напоминает ему что-то встречавшееся в теории функций Бесселя. Через два-три дня ему действительно удалось, используя аналогии с преобразованиями интегралов в указанной теории, свести злополучный интеграл к однократному, вычисление нужных значений которого на той же «Стреле» потребовало меньше суток! Экономический эффект от использования этого предложения был огромен.

Этот случай является, конечно, красноречивым примером важности математического мастерства и общей математической культуры, примером того, как много может дать правильное использование аналитических методов, примером настоящего математического образования, наконец, убедительным примером пользы от владения чистой математикой для прикладной математики в век компьютеров.

Приведем, пожалуй, еще один пример, показывающий большое значение, которое имеет общая математическая культура при занятиях не только чистой, но и прикладной математикой — важное обстоятельство, которое часто недооценивается. При решении задачи нахождения равновесной конфигурации тороидального плазменного шнура за счет преобразования уравнений, при котором зависимые и независимые переменные меняются местами, время ее решения с одного часа на ЭВМ с быстродействием 10—20 миллионов операций в секунду было снижено приблизительно до 15 минут на ЭВМ с быстродействием порядка миллиона операций в секунду *).

Следует помнить, что обучение математике, обучение владению математическими методами должно быть направлено на две цели: на обучение определенным алгоритмам и на обучение поиску. Безусловно, что в основу преподавания математики следует положить обучение имеющимся в соответствующей области законченным алгоритмам решения задач, например, методу выделения главной части функции в анализе, методу исключения переменных при решении линейных систем уравнений, тому или иному методу решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определенным разностным методам численного приближенного решения дифференциальных уравнений и т. д. и т. п.

К сожалению, а может быть, и к счастью, применение математики не сводится полностью к использованию заранее разработанных алгоритмов. Нередко для успешного использования математики при решении новых задач надо проявить определенную долю фантазии, искусства в аналитических преобразованиях, проявить определенную изобретательность, т. е. проявить черты, неотъемлемо входящие в понятие математической культуры. Этому также надо где-то учить, и научить этому, безусловно, гораздо труднее, чем научить использованию готовых алгоритмов.

В связи с этим нельзя не вспомнить неоднократно делающиеся в адрес математиков упреки, что они обучают студентов никому не нужной технике вычисления неопределенных интегралов и интегрированию в конечном виде специально подобранных дифференциальных уравнений, что все это анахронизм, поскольку если им в их дальнейшей практике встретится подобная задача, они просто воспользуются имеющимися справочниками. Я думаю, этот упрек несправедлив.

Здесь будет уместно вспомнить, что хорошо известный экзаменационный минимум, который требовал

---

*) Попов Ю. П., Самарский А. А. Вычислительный эксперимент.— М.: Знание, 1983. с. 39.

Л. Д. Ландау от желающих стать его учениками, включал в себя экзамен по математике, в который в обязательном порядке входило вычисление неопределенных интегралов. Вне всякого сомнения, Л. Д. Ландау отдавал себе полный отчет в том, что в своей работе его ученикам не придется заниматься вычислением интегралов, ибо если это им и потребуется, они скорее всего используют готовые таблицы.

Все дело в том, что где-то студента, изучающего математику, необходимо научить основным элементам аналитических преобразований, умению проявлять в них изобретательность, развить определенное аналитическое чутье, и вычисление неопределенных интегралов, а затем решение дифференциальных уравнений в квадратурах дают для этого достаточно простой и вместе с тем достаточно содержательный материал. Неизвестно, чем это можно было бы заменить с тем же эффектом полезности.

Заменить обучение искусству аналитических преобразований обучением пользоваться соответствующими справочниками, безусловно, нецелесообразно — последнее не предмет для обучения, хотя, конечно, в процессе обучения весьма полезно показать, как пользоваться справочной литературой. При этом, однако, не следует забывать, что использование всякого рода справочников предполагает определенный уровень знаний: надо знать, что надо искать, что можно найти и где это можно найти.

Развитие самостоятельности, сообразительности и находчивости, воспитание творческого отношения к любому предмету, изучаемому студентом в вузе, является очень важной частью всего процесса обучения в высшей школе, особенно (как об этом говорилось в первой главе книги) при современных требованиях к специалистам, и возможно, конечно, только на базе прочных знаний.

В применении к математике для достижения всего этого и одновременно для эффективного закрепления полученных знаний очень полезны задачи, решение которых требует комбинации методов разных разделов математики, задачи, в которых студенту для их решения надо самостоятельно подобрать подходящий для их решения метод среди нескольких, изучавшихся им раньше. Весьма полезны также задачи с недетерминированными ответами, в которых студенту самому предлагается выяснить и доказать, какое же утверждение на самом деле является справедливым.

Решение задач последнего типа может явиться первой попыткой самостоятельной научно-исследовательской деятельности. Подбор таких задач во многом зависит от опыта, эрудиции, квалификации и педагогического мастерства преподавателя.

Задачи, предложенные студенту, должны быть посильными для него и заинтересовать его. Повторные бесплодные попытки студента решить поставленные перед ним задачи могут привести к нежелательному результату: ослаблению у студента уверенности в своих возможностях и способностях.

Одним из самых надежных способов овладения математикой является активное включение в научно-исследовательскую работу в области математики или ее приложений еще в студенческие годы. Этого можно достичь, например, привлечением студентов старших курсов к участию в настоящей плановой научно-исследовательской работе, проводимой той или иной кафедрой. В процессе решения новой задачи приобретаемые математические знания сразу находят свое непосредственное применение. Это весьма эффективно способствует их усвоению и правильному пониманию. А результат — решение никем еще не изученной и вместе с тем представляющей интерес задачи внушает уверенность в собственных силах и дает ни с чем не сравнимые чувства удовлетворения и радости самостоятельного творчества.

Заканчивая разъяснение шестого положения, обратим внимание на существующую большую опасность в тенденции, которая, прикрываясь модернистским лозунгом «классическая математика устарела!», стремится заменить профессиональный уровень обучения математике знакомством с примитивными методами численного решения задач на ЭВМ и попытками математического моделирования сложных задач. Конечно, и это нужно и важно, более того, имеется и такой уровень обучения, где этим можно и ограничиться, но нужно отдавать себе отчет в том, что этого недостаточно там, где требуется серьезное профессиональное использование математических методов.

Стремление заменить углубленное прохождение материала поверхностным знакомством к ним, пренебрежение к преодолению принципиальных трудностей, которые необходимо преодолеть для приобретения профессиональных знаний, и замена главных путей побочными, не ведущими к той же цели, а приводящими к качественно более низкому уровню обучения, является одной из очень вредных тенденций, возникающих в системе высшего образования.

7. О ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

С тех пор, как стали пытаться доказать очевидные предложения, многие из них оказались ложными.

Б. Рассел

ПОЛОЖЕНИЕ СЕДЬМОЕ. Теоремы существования полезны не только для чистой, но и для прикладной математики.

Этот тезис имеет значительно более частный характер, чем все остальные, однако представляется необходимым сформулировать его в ряду остальных, так как вопрос о включении в курс математики так называемых «чистых теорем существования» вызывает очень большое число нападок со стороны потребителей математики.

Нам представляется неверным утверждение, что теоремы существования не нужны инженерам (или, скажем, физикам или химикам).

В первой главе уже говорилось о том, что неоправданный скептицизм относительно теорем существования часто происходит от непонимания того, что математическая модель не адекватна конкретному явлению, для описания которого она применена. И поскольку из существования решения реальной задачи (будь она физическая, химическая, социологическая, экономическая, лингвистическая, биологическая или какая-либо еще) не следует существование решения соответствующей математической задачи, то именно поэтому, а вовсе не из любви к логике, доказывают математики в этом случае теоремы существования и математически обосновывают свои заключения.

Доказательство теорем существования служит своеобразной проверкой, математическим экспериментом, дающим оправдание изучению рассматриваемой модели для данного явления. Если удается доказать теорему существования, единственность решения и корректность самой постановки задачи, то, как правило, создается объективная уверенность в том, что исследования проводятся в правильном направлении. Значение этого трудно переоценить: успех в работе в первую очередь определяется правильным пониманием задачи и правильной ее постановкой, правильным направлением дальнейшего поиска. Поясню это на примере одного анекдота.

Однажды после долгой разлуки встретились два старых приятеля, и один говорит другому:

— Знаешь, у меня открылся новый талант, я оказался телепатом и могу внушить каждому все, что захочу, и он беспрекословно выполнит мое мысленное приказание.

— Ну да?! — с сомнением сказал его приятель.

— Хочешь докажу? Дай мне любое задание, и сам убедишься, что я могу! — настаивал первый.

— Хорошо,— согласился его знакомый.— Видишь, впереди идет девушка. Внуши ей, чтобы она оглянулась.

— С удовольствием,— ответил тот, напряженно посмотрел вслед девушке, и та действительно оглянулась на приятелей и даже улыбнулась.

— Вот это здорово,— изумился приятель телепата. — А впрочем,— немножко подумав, заметил он,— причем тут твоя телепатия? Шла веселая девушка, ей было скучно, она смотрела по сторонам, посмотрела и на нас.

— Хорошо,— раздраженно сказал телепат.— Вот, видишь, по мосту идет старичок? Хочешь, я внушу ему, чтобы он снял ботинок и бросил его в реку?

— Ну, если ты это сделаешь, я поверю,— был ответ.

Телепат сосредоточился и, о чудо, старик остановился, нагнулся, снял ботинок и, удивляясь на себя, что он делает, бросил ботинок в воду.

— Вот это да! — изумленно протянул приятель телепата.— А впрочем,— задумчиво начал он,— мало ли сумасшедших бродит по городу, может быть, и старичок один из них. А что не придет сумасшедшему в голову! Причем тут твоя телепатия?

— Ах, вот как! — совсем рассердился телепат.— Ты все еще сомневаешься? Сейчас ты убедишься, на что я способен. Смотри, видишь налево многоэтажный дом. Укажи мне любое окно в этом доме, и тому, кто там живет, я прикажу открыть окно и выбросить свой телевизор на улицу.

— Ну, если ты это сделаешь, я, конечно, не буду больше сомневаться,— отозвался его приятель.— Давай выберем на третьем этаже второе окно слева.

Телепат остановился, поднапрягся. Увы, окно не открывалось, никто не пытался выбросить телевизор. Телепат нахмурился, сосредоточился, еще раз напрягся и, о чудо! Кто-то появился в окне, распахнул его и закричал:

— Ну, что ты ко мне привязался! Никакого телевизора у меня нет!

Мы видим, что самый надежный алгоритм оказывается бессильным, если не выполняются условия теоремы существования!

Возвращаясь от шутки к рассмотрению вопроса по существу, заметим, что с помощью теорем существования, доказательства которых имеют неэффективный характер, иногда удается получать решения задач в виде тех или иных математических формул, удобных для получения приближенных решений посредством прямых вычислений, проводимых по этим формулам.

Рассмотрим, например, задачу о вычислении корня из положительного числа. Пусть задано число $a > 0$. Зафиксируем произвольным образом число $x_0 > 0$ и для $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right). \tag{1}$$

Тогда ясно, что и для любого n, $n = 1, 2, \ldots$, будем иметь

$$x_n > 0. \tag{2}$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Покажем, что она не возрастает. Действительно, поскольку для любого числа $t > 0$ справедливо неравенство

$$t + \frac{1}{t} \geqslant 2$$

(оно равносильно очевидному неравенству $(t-1)^2 \geqslant 0$), то из (1) имеем

$$x_n = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}\,2 = \sqrt{a}.$$

Поэтому $x_n^2 \geqslant a$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant 1,$$

т. е. $x_{n+1} \leqslant x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Теперь заметим, что, согласно теореме Вейерштрасса о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности, последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел. Обозначим его через x. Переходя к пределу в равенстве (1), получим

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Отсюда $x^2 = a$, а так как в силу (2) $x \geqslant 0$, то $x = \sqrt{a}$.

Теорема Вейерштрасса является чистой теоремой существования. Известные методы ее доказательства не дают способа приближенного нахождения пределов ограниченных монотонных последовательностей. Более того, в конструктивном анализе доказывается, что существуют монотонные последовательности, для которых заведомо не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы найти их предел с любой наперед заданной точностью (такие последовательности в конструктивной математике не являются сходящимися).

Таким образом, применяя теорему о существовании предела у ограниченной монотонной последовательности, удается получить рекуррентную формулу (1) для приближенного вычисления корней. Эта формула очень удобна для применения на практике: она имеет простой вид, и получающиеся по ней последовательные приближения x_n значений квадратного корня из числа a весьма быстро стремятся к самому значению квадратного корня из a.

Может случиться, что знание теоремы существования решения задачи дает слишком мало для понимания изучаемого вопроса: не менее важно и знание теоремы единственности решения (не случайно в математике эти понятия часто объединяют, говоря сразу о теоремах существования и единственности). Очень важно знать, удовлетворяет ли условиям задачи одно или больше решений. Это нужно особенно при применении численных методов, так как при наличии нескольких решений или точек ветвления получающиеся в результате вычислений данные могут быть весьма далеки от реальной картины.

Следует, однако, напомнить, что часто случается, что мы не умеем доказывать теоремы существования для изучаемых нами задач, но тем не менее нам удается находить их численные приближенные решения, строя для этого те или иные численные алгоритмы, часто даже не умея доказывать их сходимость, не говоря уже о получении оценки погрешности. Так действительно бывает, но не следует это возводить в правило; это, как мы говорили выше, просто вынужденная необходимость, а не необходимая закономерность. Существует немало и других ситуаций, где из попыток численного решения рассматриваемых задач ничего не получается. В таких случаях качественные исследования вопросов существования и единственности решения, корректности постановки задачи могут оказать существенную помощь и иметь решающее значение для успеха проводимого исследования.

Вернемся теперь снова к более общим вопросам преподавания математики.

8. О ДЕДУКЦИИ И ИНДУКЦИИ

> Математика, излагаемая в стиле Евклида, представляется нам систематической, дедуктивной наукой. Но математика в процессе создания является экспериментальной, индуктивной наукой. Оба аспекта математики столь же стары, как сама математическая наука.
>
> *Д. Пойа*

ПОЛОЖЕНИЕ ВОСЬМОЕ. На первых этапах обучения надо отдавать предпочтение индуктивному методу, постепенно подготавливая и используя дедуктивный подход.

Вопрос индуктивного и дедуктивного метода изложения материала по математике, безусловно, заслуживает отдельного рассмотрения, поскольку он связан с основами, на которых базируется преподавание любого предмета. Имеется много приверженцев как одного, так и другого метода. К сожалению, многие, отстаивая свою точку зрения, исходят только из удобства построения курса, не принимая во внимание педагогического аспекта этого вопроса, в частности, не задумываясь об облегчении усвоения этого курса студентами. В последние годы наблюдается стремление заменять по возможности индуктивный подход дедуктивным, целесообразность этого часто представляется сомнительной.

Выбор правильного пути ознакомления учащихся с новыми для них вопросами (например, выбор индуктивного или дедуктивного метода изложения), т. е. такого пути, чтобы учащиеся по возможности быстро, хорошо и активно овладели предметом, усугубляется большими трудностями в выработке единого метода преподавания в связи с разными индивидуальными способностями и индивидуальными особенностями восприятия и мышления учащихся. Это, конечно, общая проблема, возникающая в процессе обучения по любой дисциплине.

Специфика, относящаяся к обучению математике, состоит в том, что одни лучше воспринимают понятия в рафинированном виде, при кратком их описании, другие при обстоятельном всестороннем их описании, одним свойствен подход снизу от частного к общему (индуктивный), другим подход сверху от общего к частному (дедуктивный), одним конструктивный, другим аксиоматический подход, одним логически обоснованный, другим интуитивный, одним аналитический, другим геометрический и т. д. и т. п. Существенно различна и скорость усвоения информации у различных людей. Более того, именно этим качеством они в основном отличаются друг от друга как учащиеся.

Безусловно, все это невозможно учесть, и невозможно создать такой курс лекций или написать такой учебник, чтобы для каждого учащегося они имели оптимальный характер с точки зрения усвоения им изложенного там материала. Однако забывать об этих важнейших обстоятельствах при организации учебного процесса ни в коем случае нельзя. Особенно следует отметить, что семинарские занятия, где преподаватель имеет дело с сравнительно небольшой группой студентов, дают большую возможность организовать обучение с учетом индивидуальных особенностей студентов.

Несмотря на указанную сложность ситуации, можно попытаться все же высказать некоторые общие принципы, которых целесообразно придерживаться при выборе метода изложения материала. Прежде всего надо стремиться к тому, чтобы основные понятия стали для учащегося естественными. Для этого они должны, как правило, появляться в уже знакомой учащемуся обстановке, не отягощенной дополнительными понятиями, на самом деле не существенными для объяснения основного понятия, а лишь дающими возможность провести изложение в более общем случае.

Например, математический анализ можно сразу излагать в метрических пространствах, причем получится большой выигрыш во времени и курс будет логически весьма стройным. Однако так большей частью не делается, поскольку к восприятию такого курса слушатель должен быть достаточно хорошо подготовлен. Вряд ли целесообразно излагать теорию пределов в метрических (или даже топологических) пространствах, когда слушатель не владеет другими примерами метрических пространств, кроме трехмерного. Формальное определение других метрических пространств, например, функциональных, не спасает дело, так как к этим пространствам надо привыкнуть, они должны стать естественными, надо почувствовать целесообразность и пользу от их введения, что при отсутствии знаний, по-видимому, невозможно.

Не следует забывать и о том, что без понятий равномерной сходимости и определенного интеграла невозможно достаточно полно изучать свойства важнейших функциональных пространств (например, их полноту). Поэтому изучение основ анализа сразу в метрических пространствах не принесет ожидаемой пользы. До понятия метрического пространства, как и до любой математической абстракции, надо естественным образом дорасти. Функция сама по себе достаточно содержательное понятие, и прежде чем превращать ее в точку функционального пространства, полезно как следует повозиться с ее свойствами. Так, предел функции одного переменного является очень важным и нужным понятием, рассмотрение его сразу как частного случая, например, предела по базису фильтра, может неоправданно затруднить учащемуся усвоение понятия предела. В то же самое время появление понятия предела по фильтру после пределов функций и интегральных сумм совершенно естественно и закономерно, хотя и не является обязательным.

Можно сразу ввести и понятие интеграла Лебега конструктивно, на основании теории измеримых функций, или как замыкание по соответствующей норме линейного функционала над ступенчатыми функциями, равного площади соответствующей ступенчатой фигуры. Однако вряд ли целесообразно так поступать, обходя понятие интеграла Римана на отрезке, где идея интеграла столь прозрачна и ясна.

Когда излагаются понятия, обобщающие уже известные, следует обязательно отметить это обстоятельство. Говоря о производных Фреше или Гато, надо показать их связь с обычной производной. Доказывая теоремы по линейной алгебре в многомерных пространствах, очень полезно показать, что́ следует из них для плоскости и трехмерного пространства. Ведь нередко случается, что студент, доказав ту или иную общую теорему, не в состоянии применить ее в простейшем конкретном случае.

Индуктивные методы изложения материала, при которых происходит последовательное обобщение понятий, представляются более благоприятствующими активному усвоению материала учащимися. Именно в этом смысле и понимается предпочтение индуктивного метода перед дедуктивным.

Трудно удержаться, чтобы не вспомнить еще один совет Д. Гильберта, который он дал Г. Вейлю: «Начинай с простейших примеров»*).

Что же касается затраченного времени, то если его считать не по числу лекционных часов, а по числу часов, затраченных учащимися на усвоение материала, то вряд ли оно окажется бо́льшим, чем при преподавании, основанном на дедуктивном методе. К сожалению, встречаются преподаватели математики, которые любят увлекаться формализмом, абстракциями, излагая при этом материал как нечто данное свыше, непонятно как придуманное кем-то. Это обычно дает большую экономию во времени при изложении материала, однако, как правило, совершенно неоправданно с точки зрения его активного усвоения.

Характер объектов, которые рассматриваются как конкретные или абстрактные, зависит от обстоятельств, обусловленных прежде всего уровнем математического образования учащихся.

Например, для студента, встречавшегося с уравнениями в частных производных только в курсе гидродинамики, изучение различных краевых задач для уравнения Лапласа и общих свойств гармонических функ-

---

*) Рид К. Гильберт.— М.: Наука, 1977, с. 140.

ций будет шагом от конкретного к абстрактному. Для человека, изучающего общую теорию дифференциальных или, тем более, псевдодифференциальных операторов, уравнение Лапласа будет конкретным примером. Аналогично, в теории операторов в банаховых пространствах дифференциальные операторы в свою очередь являются лишь конкретными примерами. Однако на любом уровне при изложении новых понятий, новых общих теорий необходимо и целесообразно потратить достаточно много времени на их конкретные иллюстрации, на разбор примеров, анализ частных ситуаций. При выполнени этих условий может оправдать себя и дедуктивный метод изложения.

Как всегда, надо помнить, что всякое утверждение о методике, высказанное в категорической форме, легко довести до абсурда. Это относится и к положению о предпочтительности индуктивного метода перед дедуктивным. Иногда эту предпочтительность понимают в том смысле, что считают необходимым, прежде чем ввести какое-либо математическое понятие, подготовить естественность его введения с помощью повторения исторического пути возникновения и развития этого понятия. Большей частью это, конечно, не оправданно, и приводит к бесполезной трате времени. Современный студент психологически и по своему образованию достаточно хорошо подготовлен к непосредственному восприятию математических понятий без анализа тех обстоятельств, которые привели к их появлению. Само собой разумеется, что сами по себе исторические экскурсы весьма полезны и с общеобразовательной и с гносеологической точек зрения, не говоря уже о том, что, оживляя изложение, они способствуют лучшему усвоению материала.

9. О РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

> Без знания математики нельзя понять ни основ современной техники, ни того, как ученые изучают природные и социальные явления.
>
> *А. Н. Колмогоров*

ПОЛОЖЕНИЕ ДЕВЯТОЕ. Обучение решению прикладных задач математическими методами не является задачей математических курсов, а задачей курсов по специальности.

Это положение касается одного из тех вопросов, по которому особенно часто критикуются как математические курсы в высших технических учебных заведениях, так и учебники по математике для них. Безусловно, что простейшие конкретные примеры, иллюстрирующие применение математических понятий для изучения реальных явлений, как-то: иллюстрация понятия производной скоростью движения материальной точки или линейной плотностью стержня, интеграла — работой силы, составления дифференциальных уравнений — выводом уравнения радиоактивного распада и т. п., весьма полезны. Более того, было бы ошибкой понимать девятое положение как рекомендацию не обучать студентов решению прикладных задач в курсе математики. Это всегда делалось и будет делаться, потому что это нужно и полезно.

Дело не в этом, а в том, что систематическое обучение студентов применению математических методов, изучаемых ими в курсе математики, к решению прикладных задач обязательно должно осуществляться на профилирующих кафедрах высшего технического или другого специального учебного заведения. Это должно быть непреложной обязанностью этих кафедр. Только в этом случае у учащегося может создаться убежденность в полезности и необходимости знания и использования математических методов в его профессии.

Если на профилирующих кафедрах это не делается, то, возможно, это признак того, что для данной специальности вовсе и не нужна математика в том объеме, в котором она изучается в данном институте, а может быть, и признак неблагополучной постановки изучения в нем специальных дисциплин. Во всяком случае, существенно бо́льшая польза от изучения математики будет в том случае, когда в процессе всего обучения в институте она будет достаточно широко использоваться при изложении специальных дисциплин, когда на старших курсах будут читаться нужные для специальности дополнительные курсы математики, не входящие в основную программу, короче, тогда, когда в вузе будет осуществлено непрерывное математическое образование. Увы, пока это далеко не всегда так.

Подчеркнем, что смысл девятого положения отнюдь не в разделе сфер влияния, а, наоборот, в эффективном сотрудничестве в зонах соприкосновения математических и специальных кафедр.

К математическим курсам нередко предъявляются претензии, что в них в недостаточном количестве выводятся дифференциальные уравнения, описывающие реальные явления. Этого рода критика нередко связана с присущей многим людям манерой, не делая того, что они сами обязаны делать, убежденно говорить, что это должны делать другие, и критиковать их за то, что они делают это плохо. Мне представляется, в этом вопросе следует четко осознать, что математическое моделирование реальных явлений, т. е. составление математической модели такого явления,— это задача не только математических курсов, но и в не меньшей мере, а может быть даже и в большей, специальных дисциплин. Большое удивление должно вызывать не то, что в математических курсах не строятся все математические модели, не выводятся все дифференциальные уравнения, необходимые для данной специальности, а то, что это не делается в специальных курсах. Так, например, трудно найти общий физический курс (конечно, здесь не имеется в виду теоретическая физика), в котором бы выводилось уравнение Лапласа или уравнение теплопроводности для описания какого-либо явления. Еще труднее найти в этих курсах анализ различных граничных условий рассматриваемых в них уравнений (предполагается, по-видимому, что все это должны делать математики, однако, даже при их желании, они лишены возможности это сделать в рамках времени, отводимого на математические курсы).

К упрекам рассматриваемого здесь типа в адрес математических курсов следует отнести еще упрек, состоящий в том, что после изучения курса математики студенты не знают обычно нужного физического смысла какого-то члена в каком-то уравнении. Мне представляются подобные упреки к общему курсу математики несправедливыми. Выяснение конкретного физического смысла члена уравнения — это также дело специальных дисциплин, и не следует его перекладывать на плечи математиков (подчеркнем еще раз, что речь идет об общем курсе математики, а не о специальных курсах, направленных на конкретную цель, обусловленную будущей профессией студента). Поскольку математика изучает математические модели, то ее задачей при изучении уравнений могут являться вопросы, например, следующего вида: как влияет изменение данного члена уравнения на существование решения, его единственность, его асимптотическое поведение, на корректность постановки задачи, на устойчивость решения и т. д. и т. п. Научить подобным вещам, кстати, совсем не просто, а когда студент этим овладеет, он легко усвоит и конкретные факты, нужные ему по его специальности, которые должны быть изложены в специальных курсах.

Безусловно, что обучение умению составлять математические модели реальных явлений является одной из первоочередных задач в процессе образования специалистов рассматриваемых нами профилей, и потому этому должно уделяться гораздо больше времени и внимания, чем это часто делается.

Особенно следует подчеркнуть важность и необходимость для многих специальностей умения составлять не только детерминированные математические модели, но и вероятностно-игровые, умения выбирать и использовать для этого статистические и опытные данные, обрабатывая их в случае необходимости с помощью современной вычислительной техники.

Методика обучения математическому моделированию разработана в настоящее время совершенно недостаточно. Однако было бы неправильно возлагать основную работу в этом направлении только на математиков. Она может быть успешно выполнена только при тесном содружестве и взаимодействии математиков и соответствующих специалистов: физиков, химиков, биологов, экономистов и т. п. Представляется, что наиболее целесообразно проводить обучение студентов математическому моделированию в специальных курсах, так как там это можно сделать не только на высоком профессиональном уровне, но и уделить достаточное внимание сопоставлению свойств реального объекта и его математической модели, проанализировать более полно реальный смысл математических результатов, полученных в результате изучения математической модели рассматриваемого объекта.

Правда, в настоящее время подготовка специалистов по математическому моделированию находится в руках математиков. Это, по-видимому, неизбежно, поскольку достаточно квалифицированно этот вопрос может быть решен лишь на основе хорошего математического образования. Однако, возможно, недалек тот день, когда нужную математическую подготовку будут иметь также студенты физических, биологических, технических, медицинских, экономических и других специальностей, что позволит осуществлять подготовку нужных специалистов по математическому моделированию в соответствующих специальных высших учебных заведениях. При этом следует еще раз подчеркнуть, что обучение математическому моделированию должно входить как часть в специальное образование, а не проводиться за счет общего математического образования. Изучение математики нельзя подменять обучением составлению математических моделей. В математических курсах математическое моделирование может носить лишь иллюстративный характер.

Особенно на вопросы математического моделирования следует обратить внимание в тех областях, в которых в настоящее время лишь создаются основные математические модели для изучаемых объектов. Сюда следует отнести, например, экономику, биологию, медицину, планирование, управление, социологию, лингвистику. Математическое моделирование заслуживает особенного внимания, поскольку оно играет все бо́льшую роль во многих областях современной науки и техники, являясь мощным и экономически выгодным средством как для проведения научных исследований, так и для выполнения самых разнообразных экспериментальных и конструкторских работ. Например, использование математических моделей при проектировании самолетов и кораблей и расчет их на ЭВМ экономически во много раз выгоднее создания экспериментальных образцов.

Однако математическое моделирование и проведение с помощью построенной модели «математического эксперимента» дают не только экономическую выгоду, а существенно расширяют возможности эксперимента. Математический эксперимент можно провести для изучения таких явлений, которые в естественных условиях протекают с нашей точки зрения столь медленно, что постановка реального эксперимента теряет всякий смысл. Более того, математический эксперимент можно применить для исследования таких ситуаций, которые мы просто не в силах воспроизвести в реальных условиях. Так, например, с помощью математических экспериментов изучаются эволюция Вселенной, эволюция жизни на земле *) или вообще эволюции каких-либо по-

*) Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция микромолекул.— М.: Мир, 1973.

пуляций (иногда даже воображаемых!), т. е., в частности, явления, которые мы в целом не в силах наблюдать в пределах человеческой жизни.

Не нужно, впрочем, думать, что математический эксперимент полностью заменяет реальный. Это не так прежде всего потому, что математический эксперимент имеет дело не с самим явлением, а лишь с его математической моделью. Однако интересно и важно отметить, что математический эксперимент, как и всякий эксперимент, может привести к открытию новых реальных явлений, например, физических. Примером открытия, соавтором которого является вычислительная машина, является открытие физического эффекта T-слоя, осуществленного группой ученых Института прикладной математики АН СССР, возглавляемой А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским. Сущность этого эффекта состоит в том, что в плазме, взаимодействующей с магнитным полем, при определенных условиях могут возникать зоны относительно высокой температуры. Они названы тепловыми слоями или T-слоями. В них сосредотачиваются электрические токи, разогревающие плазму и поддерживающие высокую температуру.

Таким образом, математическое моделирование в сочетании с современной вычислительной техникой дает в руки ученых качественно новые методы исследования, качественно новые методы управления процессами как естественными, так и порожденными деятельностью человека. Его широкое использование, по существу, необходимо для успешного развития наук. Оно составляет неотъемлемую часть процесса накопления знаний человеческим обществом и приводит к необходимости подготовки специалистов нового типа, владеющих не только своей специальностью, но и математикой, знающих методы математического моделирования и умеющих их творчески использовать. Поэтому в наши дни должно быть затрачено особое усилие на подготовку специалистов, способных квалифицированно решать задачи математического моделирования.

Вопрос о подготовке таких специалистов делается сейчас одним из самых важных и актуальных вопросов современного образования. Правильная организация обучению составления математических моделей возможна лишь при хорошей координации усилий в этом направлении математиков и специалистов в соответствующих областях.

10. О ВЫБОРЕ СОДЕРЖАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

> Высшее назначение математики... состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.
>
> *Н. Винер*

ПОЛОЖЕНИЕ ДЕСЯТОЕ. Каким разделам математики и в каком объеме надо учить студентов данной специальности — должны определять специалисты в этой области при консультации с математиками, а как этому учить — это дело профессионалов-математиков.

По этому тезису очень трудно дискутировать, потому что, как это уже ранее отмечалось, что-что, а уж как учить, каждый считает, что знает лучше других, и переубедить его в чем-либо практически невозможно, особенно, пожалуй, в том случае, когда он не является математиком, а лишь потребителем математики.

Наиболее разумным представляется положение (которое фактически и осуществляется, как правило, в высших учебных заведениях, однако периодически вызывает резкую критику со стороны специальных кафедр), когда объем математических знаний, степень владения ими и характер приобретаемых студентами навыков определяются ведущими специалистами в области будущей специализации студентов, а обучение студентов осуществляется профессиональными математиками. Время, отводимое на изучение математики, должно, естественно, определяться совместно специалистами в указанной области и математиками, причем следует принимать во внимание добавление всех необходимых для внутренней связи звеньев, присущих математике, как и всякой другой науке, о которых говорилось выше. Планирование, разработка методики преподавания и осуществление самого процесса обучения студентов математике должны проводиться всецело самими математиками. В действительности дело обычно не идет так гладко и периодически осложняется конфликтами между математическими и специальными кафедрами.

Иногда в этих конфликтах бывают виноваты сами преподаватели математики. Случается, что они из-за какого-то снобизма не хотят (я думаю, случаев, когда не могут, очень мало, и они не типичны при наличии достаточно квалифицированных кадров) прислушаться к пожеланиям к курсу математики, высказываемым специальными кафедрами, и догматически излагают одну теорему за другой, не обращая внимания на необходимость активного творческого овладевания студентами излагаемого материала, на развитие у них интуиции в нужном направлении, на создание у них мировоззрения практика, использующего математический аппарат лишь для решения конкретных задач и не интересующегося им как самоцелью. Встречаются иногда среди преподавателей математики, воспитанных в духе чистой математики, недооценка и даже пренебрежительное отношение к методам численного решения задач и переоценка общих качественных теорий, нежелание осознать разницу между доказательством существования решения задачи и отысканием алгоритмического устойчивого метода нахождения приближенного решения, даже несмотря на то, что такие постановки задач являются чисто математическими, очень важными и нередко более трудными и глубокими, чем относящиеся к ним вопросы «чистой» математики.

Следует отметить еще один близкий по духу упрек математикам. Очень часто, объясняя математические понятия, широко используемые в физике (или в какой-либо другой области знания), они не перекидывают мостика, связывающего эти понятия с их традиционными применениями, а это необходимо делать. Подобная ситуация случается, например, с той же дельта-функцией или с теорией скалярных и векторных полей. Так, автору многократно приходилось убеждаться, что после изучения в курсе анализа понятий дивергенции, потока векторного поля и доказательства теоремы Гаусса — Остроградского у студентов вызывал затруднение ответ на вопрос: чему равна дивергенция напряженности поля точечного единичного электрического заряда на некотором расстоянии от него.

Подобная ситуация, конечно, недопустима; справедливости ради, следует сказать, что ответственность за нее несет в равной степени с кафедрой математики и кафедра физики. В результате изучения каких-либо понятий в математике у студента не должно быть затруднений в использовании их в физике.

Недостатки в преподавании математики часто вместо естественного их анализа приводят к активному вмешательству в процесс обучения математики со стороны специальных кафедр и деканатов, что, как правило, отнюдь не содействует улучшению математической подготовки студентов. Известные мне попытки нематематиков взять в свои руки обучение математике не дали положительных результатов, что, конечно, естественно. Безусловно, что никто лучше хорошего профессионала-математика не сможет научить математике, на то он и хороший специалист своего дела. Лишь он, владея всем предметом в целом, может по существу разобраться, что следует доказывать в общем виде, а что в частном, а что и вовсе не доказывать, какие полезней всего рассмотреть примеры и т. д. и т. п.

Для правильной постановки преподавания математики необходимо достичь определенного уровня взаимопонимания между математическими и специальными кафедрами. Там, где этот уровень достаточно высок, а таких примеров довольно много, успех налицо.

Важно подчеркнуть, что настоящее взаимопонимание между преподавателями математических и специальных кафедр и их плодотворное сотрудничество может возникнуть только в случае достаточно высокой квалификации сотрудников этих кафедр. Поэтому подбор высококвалифицированных преподавателей для педагогической работы в высших учебных заведениях всегда является главной задачей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы сформулировали десять основных положений, на которых можно строить преподавание математики в высших учебных заведениях. Конечно, возможно было бы исходить и из других положений: в методике нельзя с помощью только одних логических рассуждений установить, что истинно и что ложно. Лишь хорошие результаты обучения студентов, достигнутые в результате использования той или иной методики преподавания, могут служить обоснованием целесообразности ее применения. Следует заметить, что указанные десять принципов лежат, по существу, в основе преподавания математики во многих высших учебных заведениях и дают возможность выпускать специалистов, умеющих достаточно квалифицированно и успешно использовать математический аппарат в своей работе.

Однако успокаиваться на достигнутых успехах, когда наблюдаются невиданные ранее темпы развития наук, в том числе и математики, и особенно, когда эти темпы непрерывно убыстряются, нельзя.

Небывалый рост и прогресс научных исследований, а также увеличение в связи с этим процента научных работников в общей массе людей имеет своим прямым следствием возникновение огромного потока информации или, как говорят, информационного взрыва.

Постоянно увеличивается и объем новой математической информации: решаются разнообразные задачи (теоретические, экспериментальные, прикладные), возникают новые понятия, строятся новые математические модели, развиваются и обобщаются старые теории, создаются новые, изобретаются новые методы исследования, доказываются новые теоремы, выдвигаются гипотезы, и все это находит свое отражение во все возрастающем количестве публикаций научных и методических статей, монографий, учебников (хотя последних по-прежнему во многих случаях остается недостаточно — учебная литература не успевает отражать новейшие достижения современной науки и техники), депонированных рукописей, диссертаций. Растет число научных издательств, вновь и вновь создаются новые математические журналы, расширяются ротапринтные издания, приобретающие все большее и большее значение для быстрого обмена информацией, и т. д. и т. п.

Дело не только в количественном увеличении информации. В ней происходят и большие качественные изменения. Значительная ее часть приобретает узкоспециальные черты, благодаря чему она делается доступной для понимания и правильной оценки лишь ограниченному кругу специалистов в соответствующей области.

В связи с увеличением роста количества информации и вследствие этого с ее обилием, с которым человечество прежде не встречалось, в том числе и с обилием полезной информации, а также в связи с тем, что она качественно делается иной, возникает важная и актуальная задача систематизации имеющихся информационных сведений.

Наличие такой систематизации может существенно помочь своевременному нахождению полезной информации и умению выделить из нее часть, необходимую для достижения той или иной поставленной цели, в частности для оптимального отбора информации, которая должна быть сообщена студентам и усвоена ими в процессе их обучения. Это очень сложная задача. Поэтому сейчас как никогда на представителях старшего поколения ученых лежит ответственность за выбор того нужного и принципиально важного материала из всего богатства знаний, накопленного современной наукой, который действительно необходимо передать молодежи, и притом в первую очередь. Здесь особенно важно чувство меры.

В заключение еще раз отметим, что объем информации, которую может усвоить учащийся, не беспределен. Поэтому из каких бы принципов ни исходить при отборе материала, который мы собираемся передать нашим ученикам, какие бы при этом ни ставить перед собой цели, если мы хотим добиться успеха в обучении, то всегда полезно помнить афоризм Козьмы Пруткова *): «Никто не обнимет необъятного!».

Руководствуясь этими принципами, следует не перегружать учебные программы изучаемых дисциплин, а составлять их, сообразуясь с реальным объемом времени, которое могут тратить студенты на активное усвоение получаемой ими в процессе обучения информации.

---

*) Сочинения Козьмы Пруткова.— М.: Изд-во «Правда», 1982.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики.— М.: Сов. радио, 1970.
2. Александров П. С. Мир ученого.— Наука и жизнь, 1974, № 8.
3. Арсеньев А. А., Самарский А. А. Что такое математическая физика.— М.: Знание, 1983.
4. Биркгоф Г. Математика и психология.— М.: Сов. радио, 1977.
5. Гнеденко Б. В. Математическое образование в вузах.— М.: Высшая школа, 1981.
6. Гнеденко Б. В. Математика и научное познание.— М.: Знание, 1983.
7. Колмогоров А. Н. О профессии математика.— 3-е изд.— М.: МГУ, 1960.
8. Крылов А. Н. Воспоминания и очерки.— М.: Изд-во АН СССР, 1956.
9. Кудрявцев Л. Д. Как преподавать математику.— Наука и жизнь, 1979, № 3.
10. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание.— М.: Наука, 1980.
11. Моисеев Н. Н. Математик задает вопросы...— М.: Знание, 1974.
12. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент.— М.: Наука, 1979.
13. Пойя Д. Математическое открытие.— М.: Наука, 1976.
14. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М.: ИЛ, 1975.
15. Попов Ю. П., Самарский А. А. Вычислительный эксперимент.— М.: Знание, 1983.
16. Постников А. Г. Культура занятий математикой.— М.: Знание, 1975.
17. Реньи А. Диалоги о математике.— М.: Мир, 1969.

18. Рыбников К. А. Введение в методологию математики.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
19. Рыбников К. А. Очерки методологии математики.— М.: Знание, 1982.
20. Самарский А. А. Что такое вычислительный эксперимент?— Наука и жизнь, 1979, № 2.
21. Седов Л. И. Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего.— М.: Наука, 1973.
22. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике.— М.: Наука, 1979.
23. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Вводные лекции по прикладной математике.— М.: Наука, 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лев Дмитриевич Кудрявцев

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЕ

Редактор *М. М. Горячая*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Л. И. Назарова,*
И. Я. Кришталь

ИБ № 12732

Сдано в набор 28.11.84. Подписано к печати 30.05.85. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 9,24. Усл. кр.-отт. 9,45. Уч.-изд. л. 9,35. Тираж 29 500 экз. Заказ № 505.
Цена 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫШЛА ИЗ ПЕЧАТИ КНИГА:

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. **Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость:** Учебное пособие для вузов.— 1984.— 592 с.— В пер.: 1 р. 60 к.

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ
(аннотированный план 1985 г., № 66):

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. **Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды:** Учебное пособие для вузов.— 32 л.— В пер.: 1 р. 40 к.

В дальнейшем авторы предполагают подготовить «Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных».

В книгах предлагается разнообразный набор задач от самых простых до достаточно сложных, много оригинальных задач, предлагавшихся студентам Московского физико-технического института. Большое внимание уделяется задачам, решение которых помогает усвоить основные понятия анализа. Каждый раздел начинается с краткого изложения теории и разбора решений ряда типичных задач.

Наличие задач разной трудности дает возможность использовать задачник как в университетах, так и в технических вузах.

Предварительные заказы принимаются всеми магазинами книготорга и «Академкниги», распространяющими научно-техническую литературу.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ
(аннотированный план 1985 г., № 65):

Розанов Ю. А. **Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика:** Учебник.— 20 л.— В пер.: 95 к.

Учебник состоит из трех частей, отличающихся не только содержанием, но и характером изложения. В первой части много сравнительно простых по постановке задач, приводящихся к различным моделям теории вероятностей и случайных процессов. Вторая часть посвящена основным методам математической статистики в применении их к наиболее типичным задачам. Третья часть содержит элементы общего анализа случайных функций. Первая и вторая части могут быть основой курса по теории вероятностей и случайным процессам для вузов, где математика не является профилирующей специальностью. Третья часть как продолжение первых двух рассчитана на студентов математических отделений университетов и втузов с повышенной математической подготовкой.

Предварительные заказы принимаются всеми магазинами книготорга и «Академкниги», распространяющими научно-техническую литературу

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ
(аннотированный план 1985 г., № 73):

Федорюк М. В. **Обыкновенные дифференциальные уравнения:** Учебное пособие.— 2-е изд., доп.— 22 л. (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов).— В пер.: 1 р. 10 к.

Книга содержит изложение основ теории обыкновенных дифференциальных уравнений, включая теорию устойчивости, и вариационное исчисление. Значительное место уделено уравнениям с частными производными первого порядка, аналитической теории дифференциальных уравнений и асимптотике решений линейных уравнений второго порядка. В новом издании (первое издание выходило в 1980 г.) добавлены методы теории возмущений при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром.

Для студентов втузов, а также для инженеров-исследователей.

Предварительные заказы принимаются магазинами книготорга и «Академкниги», распространяющими научно-техническую литературу

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ
(аннотированный план 1985 г., № 70—71):

Шабат Б. В. **Введение в комплексный анализ:** Учебное пособие. Ч. I.— 3-е изд. дополн.— 20 л.— В пер.: 95 к; Ч. II.— 3-е изд., перераб. и доп.— 25 л.— В пер.: 1 р. 10 к.

В книге, состоящей из двух частей, дается единое изложение основ теории функций одного и нескольких комплексных переменных. Она написана на базе лекций, в течение ряда лет читаемых автором в Московском университете.

Первая часть посвящена функциям одного переменного. В третье ее издание (второе выходило в 1976 г.) внесены небольшие изменения в текст, а также добавлены разделы, посвященные алгебраическим функциям и приложениям теории целых функций.

Во второй части излагаются основные понятия теории функций нескольких комплексных переменных, и она может служить учебным пособием по специальному курсу. Эта часть в третьем издании (второе выходило тоже в 1976 г.) подверглась значительной переработке.

Для студентов и аспирантов математических, механических и физических специальностей университетов.

Предварительные заказы принимаются всеми магазинами книготорга и «Академкниги», распространяющими научно-техническую литературу.